

Бојан Лазић

Педагошки факултет у Сомбору Универзитета у Новом Саду

Сања Маричић

Учитељски факултет у Ужицу Универзитета у Крагујевцу

Јасмина Милинковић

Учитељски факултет Универзитета у Београду

UDK - 371.3::512.1-028.31

DOI: 10.5937/nasvas1504679L

Оригинални научни рад

НВ год. LXIV 4. 2015

Примљено: 02. 05. 2015.

Прихваћено за штампу: 05. 07. 2015.

ПРОПЕДЕВТИЧКО УЧЕЊЕ РАЗЛОМАКА ЗАСНОВАНО НА ИНТЕГРАЦИЈИ САДРЖАЈА У ПОЧЕТНОЈ НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ¹

Апстракт *У раду је представљен методички приступ пропедевтичког увођења разломака, заснован на интеграцији садржаја математике, с циљем да се испита да ли овакав приступ садржајима у почетном математичком образовању унапређује квалитет знања ученика. Квалитет знања ученика посматран је кроз успешност ученика у примени стечених знања у самосталном решавању проблемских задатака и решавању задатака датих у реалистичном контексту. Емпиријска провера понуђеног методичког приступа верификована је у оквиру експерименталног истраживања на узорку ученика четвртог разреда основне школе на часовима редовне наставе математике. Резултати добијени у експерименталном истраживању показују да интеграција садржаја у пропедевтичком учењу знатно утиче на успешност ученика у самосталном решавању проблемских задатака и примени стечених знања у решавању задатака датих у реалистичном контексту.*

Кључне речи: *интеграција садржаја, математика, пропедевтичко учење, почетна настава математике, разломци.*

¹ Рад је настао у оквиру пројекта *Настава и учење: проблеми, циљеви и перспективе*, бр. 179026, чији је носилац Учитељски факултет у Ужицу, а који финансира Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије.

PROPEDEUTIC FRACTION LEARNING BASED ON CONTENT INTEGRATION IN THE INITIAL TEACHING OF MATHEMATICS

Abstract *The paper presents the methodological approach of propedeutic introduction to fractions, based on the integration of the mathematical contents, with the aim to examine whether this approach to contents in initial mathematical education enhances the quality of learners' knowledge. The quality of knowledge was assessed according to successful application of acquired knowledge in solving problem tasks and tasks presented in realistic context. The empirical test of the offered methodological approach was verified within an experimental research with the sample comprising the fourth-grade pupils of an elementary school during regular math classes. The results of the research show that the integration of contents in propedeutic learning enhances significantly pupils' successfulness in independent solving problem tasks and application of acquired knowledge in solving tasks presented in a realistic context.*

Keywords: *contents integration, mathematics, propedeutic learning, initial math teaching, fractions.*

ПРОПЕДЕВТИЧЕСКОЕ ИЗУЧЕНИЕ ДРОБЕЙ НА ОСНОВЕ ИНТЕГРАЦИИ СОДЕРЖАНИЙ В НАЧАЛЬНОМ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Резюме *В статье рассматривается методическая концепция внедрения пропедевтического введения дробей, основанная на интеграции математических учебных содержаний. Хотелось получить ответ на вопрос о том, способствует ли данный подход в начальном этапе обучения математике улучшению качества знаний учеников. Качество знаний оценивается на основе успеха учеников в применении приобретенных знаний при самостоятельном решении проблемных заданий и решении задач, поставленных в реальный контекст. Эмпирическая проверка предложенного методического подхода была подтверждена в экспериментальном исследовании на примере учеников четвертого класса восьмилетней школы. Результаты, полученные в экспериментальном исследовании, показывают что интеграция содержаний обучения в пропедевтическом обучении значительно влияет на успех учеников в самостоятельном решении проблем и применении приобретенных знаний при решении задач, связанных с реальным контекстом.*

Ключевые слова: *интеграция учебных содержаний, математика, пропедевтическое обучение, начальная школа, дробные числительные.*

Увод

Учитељи се свакодневно сусрећу са потребом да обезбеде контекст за учење који је реалан, близак ученику, холистички оријентисан, у коме се различити извори сазнања интегришу с циљем да се обезбеди доминантна активност ученика у процесу учења, у коме ће он моћи у потпуности да испољи своје потенцијале и стекне квалитетнија и трајнија знања неопходна за живот у савременом добу. На плану изналажења решења за стварање таквог амбијента за учење настају различити иновативни модели наставе, међу којима у раду посебно издвајамо интегративну наставу.

Идеја о интеграцији наставе није нова. Још у XIX веку Ј. Хербарт (J. H. Herbart) и његови следбеници покушавали су да наставни процес учине ефикаснијим тако што ће груписати садржаје више наставних предмета у једну целину како би их ученици лакше разумели и усвојили. Почетком XX века Џ. Дјуи (J. Dewey) се залаже за организацију наставе у којој би у првом плану били пројекти који проистичу из реалног окружења и интересовања ученика, а не наставни предмети. Потом В. Килпатрик (W. H. Kilpatrick) заснива пројект методу, П. Петерсен (P. Petersen) Јена-план, представници комплексне наставе у Совјетском Савезу наставу кроз комплексе и др. (Ђријуповић & Марићић, 2012).

Захтев за интеграцијом наставе у математичком образовању у многим земљама јасно је истакнут у курикулуму где се наглашавају три повезана аспекта математике: уобличавање садржаја – целина, математички процеси и математичке везе (*Principles and Standards for School Mathematics*, 2000). У складу с тим су и захтеви бројних удружења и организација за интегрисано математичко образовање (*The School Science and Mathematics Association - SSMA*, *The National Council of Teachers of Mathematics - NCTM*, *The American Association for the Advancement of Science - AAAS*, *The National Research Council - NRC*). У појединим европским земљама (Словенија, Мађарска, Белгија и друге) постоје државне стратегије које захтевају и подржавају имплементацију интегрисане наставе.

Теоријска полазишта истраживања

Предности интегрисаног приступа учењу у почетној настави математике су вишеструке. Овакво учење обезбеђује дубље увођење ученика у чињенице, бољу укљученост у учење, али и већу мотивацију ученика и учитеља (Kostelnik et al., 2004), пружа окружење које омогућава и подстиче процес учења и активно учешће свих ученика (Fisher, 1991), олакшава развој холистичког приступа проблемима, кохезију и повезивање функционалног знања (Milinković, 2011). Интегрисани наставни план и програм пружа могућности за више релевантних, мање фрагментисаних и више стимулативних искустава за ученике (Frykholm & Glasson, 2005; Koirala & Bowman, 2003). На овај начин долази до изражаја примена математике у различитим контекстима (Whitin & Whitin, 2004), обезбеђује се смислено, аутентично учење (Clements et al.,

2003; Kilpatrick et al., 2001), али и јачају знања и вештине у више од једне предметне области (*Early Childhood Mathematics: Promoting Good Beginnings*, 2002).

Упркос интенцијама да наставни програм буде конципиран тако да ученици стекну целовиту слику о предмету, правилно формирају појмове и схвате појмовну структуру, образовни систем у Републици Србији најчешће карактерише атомизација наставних садржаја и наставног процеса. У наставној пракси математике често се примењује изолована обрада наставних садржаја, мало је повезивања и изграђивања математичког знања кроз друге области, а у образовној пракси може се говорити о ретким и појединачним покушајима имплементације интегративног приступа у настави математике.

Када говоримо о интеграцији наставе у области математичког образовања, можемо имати у виду два начина: „један који полази од распореда садржаја у програму математике у виду концентричних кругова и који пружа могућности за интегрисање сродних садржаја математике у различитим разредима, и други, који подразумева интегрисање садржаја математике са садржајима једног или више других наставних предмета око једне теме под условом да се у ту тему природно и логично уклапају“ (Špijunović & Maričić, 2012: 282). Овом приликом желимо да скренемо пажњу на вертикалну интеграцију садржаја математике, као природну последицу конципирања наставног програма математике не само по линеарном принципу, већ и по принципу концентричних кругова (Špijunović i Maričić, 2011). Таква организација наставе математике претпоставља активно учење ученика путем решавања проблема, укључујући свестран, интердисциплинаран приказ проблема и могућност да ученици јасно уоче везе и односе међу садржајима у потрази за разумевањем. Овакав приступ доприноси понављању стечених знања, изграђивању нових знања на темељу постојећих, повезивању садржаја различитих области математике и повезивању нових знања са постојећим. Интеграцију садржаја захтева широко постављен проблем кроз конкретну ситуацију, који се диференцира ка ученицима. На тај начин обезбеђује се сагледавање различитих димензија једног проблема и њихово синтетизовање у нови целовит реалан контекст. Овакав приступ настави математике захтева активног ученика, целовит контекст за учење и већу могућност да се запамте везе и решавају проблеми (Spremić, 2007). На тај начин се реалистичним и проблемским задацима математика представља ученицима као животна дисциплина која прожима реалност, а не као издвојена школска дисциплина (Polya, 1980).

Настава математике у млађим разредима основне школе, између осталог, треба да буде оријентисана на припрему ученика за усвајање знања у вишим разредима основне и средње школе (Gleizer, 1997). Управо вертикална интеграција садржаја математике „омогућава да се обнавља знање стечено у претходном разреду а да се истовремено остварује добра и осмишљена припрема ученика за захтеве који их очекују у наредном разреду“ (Špijunović i Maričić, 2011: 578). Наставни садржаји у млађим разредима основне школе могу се уводити потпуном обрадом, или само пропедевтички (English, 1999; Gleizer 1997; Jordan et al., 2006; Krekić, 2007;

Lazić et al., 2012; Watt, 2004). У раду посебно желимо да сагледамо пропедевтичко учење (од грчке речи *propaideuo* – претходно поучавање, предшкола, знање које служи као увод и припрема, припремна обука, припремна настава), засновано на вертикалној интеграцији садржаја, и то конкретно на увођењу садржаја о разломцима у млађим разредима основне школе.

Више је разлога за овакво опредељење. У основном математичком образовању, посебно за млађе разреде, пропедевтичка обрада садржаја, иако изузетно значајна, недовољно је заступљена. Целовита истраживања у области ове теме практично не постоје, а парцијална су веома ретка. Проблему савременог методичког приступа садржајима о позитивним рационалним бројевима у почетној настави математике, који је евидентан, значајан и врло актуелан, код нас није посвећена адекватна пажња. У литератури постоји велики број различитих приступа методичке трансформације ових садржаја (Behr et al., 1992; Freudenthal 1983), што указује на сложеност овог процеса. Садржаји о разломцима сложени су за усвајање и разумевање, а учење разломака није довољно ефикасно и чак представља потешкоћу у математичком образовању за велики број ученика, посебно због чињенице што се овај скуп бројева налази изван скупа природних бројева који представља основни скуп за целокупну почетну наставу математике.

У трагању за јасним аргументима и адекватним методичким приступом садржајима о позитивним рационалним бројевима у млађим разредима основне школе, посебно треба имати у виду општеприхваћени став да се знање гради на претходном знању (Berlin & White, 1995). То значи да је за успешно учење важно извршити избор садржаја који ће ученике довести до нивоа са ког могу успешно наставити усвајање математичких садржаја, према програмски предвиђеним циљевима (Mičić, 2010). При томе се неминовно намеће питање које је искуство, односно предзнање, потребно ученицима за ефикасно учење програмом предвиђених садржаја о разломцима у млађим разредима основне школе. Сигурно је да основу треба да чини скуп природних бројева и усвојене операције са бројевима унутар овог скупа. Управо интеграција садржаја у настави математике даје целовит контекст за учење и функционално знање и омогућује проширивање појма природног броја.

Осим тога, за формирање појма рационалног броја, неопходно је рано започињање и континуитет у наставним активностима и њихово уклапање у ток раније започетог учења појмова или правила. Под наведеним подразумевамо и одређена сазнања о математичким садржајима, спонтано настала на основу искуства детета. У сваком случају, рано започињање морамо схватити као припремну наставу/учење, односно пропедевтичку наставу/учење.

Примена пропедевтичког, раног увођења математичких појмова и структура пружиће неопходна уводна знања, допринеће обогаћивању основног математичког образовања и предупредити тешкоће у усвајању програмских математичких садржаја на вишим нивоима основног образовања. Циљ нашег рада је да се применом интеграције садржаја математике истраже могућности за пропедевтичко

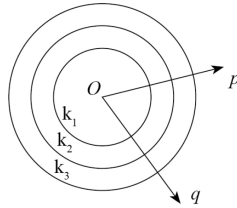
проширивање појма разломка у млађим разредима основне школе, као и ефекти овог облика учења у даљем образовању, а посебно у домену самосталног решавања проблемских задатака и решавању проблема датих у реалистичном контексту.

Пропедевтичко увођење садржаја о позитивним рационалним бројевима у почетну наставу математике треба заснивати на претходном знању и искуству и интегрисати га са осталим програмским садржајима наставе математике, али и другим предметним областима. Деца се још у најранијим годинама сусрећу са различитим поделама целине, односно објекта коме се придружује број један. На пример, једну рођенданску тарту, чоколаду, питу сечемо на приближно једнаке делове по маси и облику. Векну хлеба такође сечемо на приближно једнаке делове по маси, али не и по облику. Међутим, векну хлеба можемо, као и тарту, поделити на два приближно једнака дела по маси и по облику. Како су то једине битне особине поменутих целина, можемо говорити о половини тарте, чоколаде, пите или векне хлеба. На наведеном или сличним примерима, деца могу пропедевтички формирати појам једне половине већ у раном детињству. Штавише, реално је могуће да схвате везу половине и целине. Две половине чине једну целину, и обрнуто, једна половина је део целине подељене на два једнака дела. Међутим, постоје целине које реално не можемо поделити на два једнака дела. Имајући у виду да се деца у почетном математичком образовању налазе на нивоу конкретног мишљења, активности везане за разумевање појма разломка неопходно је константно подржавати вишеструким визуелним репрезентацијама, јер се тиме активира наставни процес учења, а апстрактни садржај чини разумљивијим, што утиче на позитиван трансфер и функционално знање.

Ипак, пропедевтички је могуће да се тако одређен појам разломка схвати као број и прикаже на бројевној полуправи, као део јединичне дужи, за основне разломке. Тако постављеним циљем и задатком, пропедевтички можемо проширити и појам осталих позитивних разломака. За то су најпогодније наставне јединице у којима се уче правила дељења, односно одређивање количника. То значи да најкасније у трећем разреду уводимо једнакост ознака за количник и разломак, односно назначени количник $a:b$ има исто значење као разломак у запису $\frac{a}{b}$. Тиме изједначавамо и улогу дељеника у количнику са улогом бројиоца у разломку, као и улогу делиоца у количнику са улогом имениоца у разломку.

Представљање разломка кругом представља један од најефикаснијих модела за изградњу менталне слике разломка (Cramer & Henry, 2002). Имајући у виду циљ, којим пропедевтички формирамо појам разломка као позитиван рационалан број, битно је да се апстрахује целина, односно искључи њена улога. На пример, коришћењем три концентрична круга и њиховом деобом двама полуправама чија је почетна тачка центар кругова формирамо егземплар (слика 1).

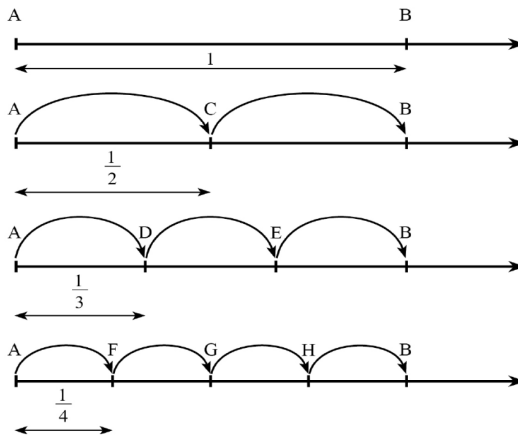
Слика 1. Модел за уопштавање појма разломка



Хеуристичким вођењем учитеља ученици брзо изводе закључак да је однос (количник $a:b$) тако добијених кружних исечака *једнак* за све кругове, односно представља разломак $\frac{a}{b}$ као јединствен број.

Због своје једноставности и тачности конструкције, бројевна полуправа представља један од најчешће коришћених модела за визуелно представљање разломака у даљем учењу, јер помаже ученицима да се фокусирају на основну карактеристику разломка као „разломљеног броја“ (Ball, 1993). Надовезивањем јединичних дужи (делова целине) може се илустративно одредити целина у односу на дати разломак, односно деобом дате дужи као целине на одређени број једнаких делова визуелно приказати одређени разломак (слика 2).

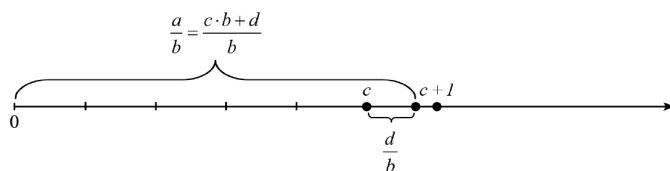
Слика 2. Представљање разломака помоћу бројевне полуправе



Како је дељење условна операција у скупу N , пропедевтичко увођење појма разломака већих од јединице (неправи разломци) заснива се на *дељењу са остатком*. Прво одређујемо значење остатка при дељењу погодним примерима, а свакако и приказом на бројевној полуправи. Ако је дељеник a , делилац b , количник c , а остатак d , тада запис $a:b=c(d)$ пропедевтички замењујемо записом $a:b = \frac{c \cdot b + d}{b}$

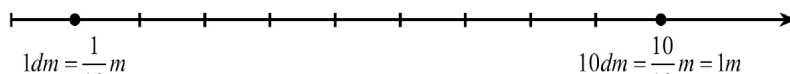
на основу транзитивности две једнакости. Притом, не користимо назив и запис мешовитог разломка, већ описно одређујемо разломак у целини са његовим местом на бројевној полуправи (слика 3):

Слика 3. Приказ неправих разломака



Формирање појма разломка успешно се може интегрисати и са садржајима тематске целине *Мерење и мере*. На пример, један дециметар представља десети део метра или једну десетину метра (слика 4).

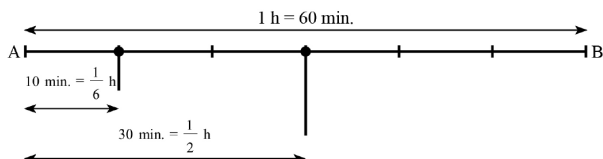
Слика 4. Модел за јединице мере за дужину (dm,m)



Аналогно наведеном примеру, у даљем учењу мерења дужине, методом дужи визуелно можемо представити и стоте делове целине ($1\text{cm} = \frac{1}{100} m$). По мишљењу Рендала, децимални број је друго име за разломак, а представљени модели су веома подесни и за визуелно приказивање децималних разломака у запису са једном и две децимале, као и неправих разломака, односно мешовитих бројева (Randall, 2005).

На сличан начин визуелно је могуће представити однос мерних јединица и других изучаваних физичких величина у облику разломка (мерење масе, запремине течности, површине, запремине и друго). Исто тако, лако се може уочити, на пример, да је 30 минута једнако једној половини часа или да 10 минута представља једну шестину часа (слика 5).

Слика 5. Модел за јединице за мерење времена (час, минут)



На описани начин могуће је, интеграцијом садржаја, пропедевтички увести и релацију поретка, операције сабирања и одузимања разломака истих именилаца, множење разломака природним бројем, проширивање и скраћивање разломака, као и одређене операције у децималном запису са једном и две децимале (Lazić i Petojević, 2014). Потврду оваквих ставова дају и емпиријски резултати који указују на позитивне ефекте оваквог учења на успех у учењу, на трајност знања, али и на касније учење ових садржаја у старијим разредима основне школе (Lazić, 2014).

У складу с тим, желели смо да испитамо у којој мери пропедевтичко учење садржаја о разломцима у млађим разредима основне школе, засновано на интеграцији садржаја математике, повећава ефикасност учења наведених садржаја. У испитивању ефеката описаног методичког приступа, пажњу смо усмерили на више нивое квалитета знања посматрајући га, првенствено, кроз успешност ученика у самосталном решавању проблемских задатака и примени стечених знања у решавању задатака у реалистичном контексту.

Методологија истраживања

Истраживање је обављено на узорку (N=140) који је одабран из популације ученика четвртог разреда основних школа у Републици Србији. Пошто смо се определили за истраживање засновано на експерименту са паралелним групама, формирали смо две уједначене групе ученика – експерименталну (Е) и контролну (К). Експерименталну групу чинили су ученици четири одељења четвртог разреда из једне основне школе у Сомбору, а контролну групу ученици четири одељења друге основне школе, такође у Сомбору. Уједначеност експерименталне и контролне групе статистички смо контролисали анализом коваријансе.

Истраживање је реализовано у току школске 2012/2013. године кроз неколико етапа. У септембру 2012. године извршено је сондажно истраживање у једној основној школи у Сомбору. Након тога извршене су корекције инструмената истраживања и израда коначне форме иницијалног теста, који је обухватио садржаје о разломцима из трећег разреда. У октобру 2012. године истовремено су извршена иницијална тестирања ученика експерименталне и контролне групе (ТИПР). Затим је у експерименталну групу уведен експериментални програм у оквиру часова редовне наставе математике. За то време настава математике у контролној групи одвијала се према програму математике за четврти разред на уобичајени начин.

Експериментални програм чинила је обрада 22 садржаја о разломцима, а реализован је у оквиру 28 наставних часова. На часовима је примењиван методички приступ пропедевтичког учења садржаја о разломцима, према распореду наставних тема и наставних јединица који је планиран годишњим програмом рада школе. У припреми и реализацији пропедевтичког дела обраде приоритетно смо користили унутрашње повезивање наставних програма математике, и то првенствено садржаја о разломцима са дељењем у скупу N и мерењем. Експериментални програм реализовали су учитељи одељења експерименталне групе према сачињеном

упутству, са комплетним припремама часова за реализацију наведених наставних јединица и прецизно описаном методиком рада.

Након реализације експерименталног програма, у обе групе узорка ученика истовремено је извршено финално тестирање (ТФПР). Циљ је био да се измере ефекти пропедевтичког учења садржаја о разломцима, заснованог на вертикалној интеграцији садржаја, на успешност у решавању проблемских задатака и примени стечених знања у решавању задатака у реалистичном контексту. Тестом су били обухваћени садржаји о разломцима предвиђени програмом математике за четврти разред основне школе, након њихове обраде на крају четвртог разреда.

За потребе истраживања сачинили смо два теста:

1. ТИПР – иницијални тест

2. ТФПР – финални тест којим су мерени ефекти методичког приступа пропедевтичког увођења разломака на успешност ученика у самосталном решавању проблемских задатака и примени стечених знања у решавању задатака у реалистичном контексту.

Објективност теста обезбеђена је тиме што је сваки ученик стављен у приближно једнаку испитну ситуацију, што су независни испитивачи поступали по јединственим упутствима и што је оцењивање задатака вршено на једнак начин на основу кључа. Утврдили смо логичку и садржајну валидацију тестова утврђивањем слагања тестова са захтевима наставног програма и садржајима на које се односе. Поузданост инструмента утврђена је израчунавањем Cronbach's alpha coefficienta ($\alpha = .88$) који указује на високу поузданост инструмента. Дискриминативност теста утврђена је на основу ајтем анализе. Коефицијент дискриминативне вредности задатака креће се у распону од 0,14 до 0,25.

Подаци добијени истраживањем обрађени су употребом статистичког програмског пакета IBM Statistics SPSS20, при чему је коришћена једнофакторска анализа варијансе (ANOVA) за праћење ефеката експерименталног програма у експерименталној групи и анализа коваријансе (ANCOVA) за статистичку контролу уједначености група у истраживању.

Резултати истраживања и дискусија

Самостално решавање проблемских задатака

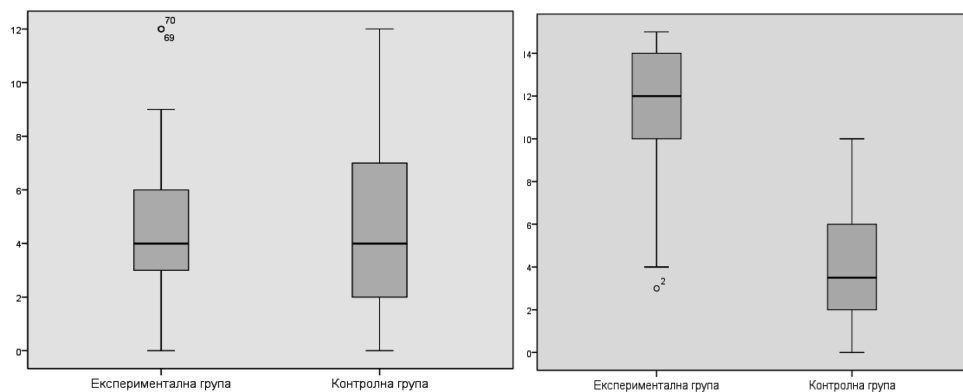
Најпре смо желели да испитамо да ли пропедевтичко учење разломака засновано на вертикалној интеграцији садржаја математике остварује позитивне ефекте на ученикову способност самосталног решавања проблемских задатака. На иницијалном тестирању обе групе ученика на решавању ових задатака постигле су приближно уједначене резултате: експериментална ($M=4,67$; $Sd= 2,394$), контролна група ($M=4,61$; $Sd=2,896$) (табела 1). Израчуната варијанса ($F(1,138)=0,016$; $p=0,899$) указује на то да не постоји статистички значајна разлика у успешности ученика у самосталном решавању проблемских задатака на иницијалном мерењу (табела 1).

Табела 1. Дескриптивни показатељи успешности експерименталне и контролне групе

Тест	Група	M	SD	Std.Er.	Min	Max
Иницијални	Експериментална	70	4.67	2.394	0	12
тест	Контролна	70	4.61	2.896	0	12
	Укупно	140	4.64	2.647	0	12
Финални	Експериментална	70	11.47	3.068	3	15
тест	Контролна	70	3.99	2.966	0	10
	Укупно	140	7.73	4.811	0	15

Након иницијалног мерења у експерименталну групу уведен је експериментални програм, односно методички приступ увођења разломака пропедевтичким учењем заснован на вертикалној интеграцији садржаја, док је контролна група радила на устаљен начин. Након реализације експерименталног програма извршено је финално мерење (ТФПР). Увидом у табелу 1 уочавамо знатно побољшање у просечно освојеном броју поена на финалном мерењу код ученика експерименталне групе ($M=11,47$; $Sd=3,068$), док ученици контролне групе бележе известан пад у односу на иницијално мерење ($M=3,99$; $Sd=2,966$) (графикон 1).

Графикон 1: Графички приказ поређења резултата Е и К групе



Варијанса на финалном тесту ($F(1,138)=215,415$; $p < 0,001$) показује да постоје статистички значајне разлике између експерименталне и контролне групе на финалном мерењу способности ученика да самостално решавају проблемске задатке (табела 2), што потврђује нашу претпоставку о утицају примењеног методичког приступа.

Табела 2. Анализа варијансе

Тест	Извор варијације	Сума квадрата	df	Средња вред. квадрата	F	p
Иницијални тест	Између група	.114	1	.114	.016	.899
	Унутар група	974.029	138	7.058		
	Укупно	974.143	139			
Финални тест	Између група	1961.257	1	1961.257	215.415	.000
	Унутар група	1256.429	138	9.105		
	Укупно	3217.686	139			

Да бисмо отклонили сумњу да је резултат последица неуједначености експерименталне и контролне групе, израчунали смо коваријансу (ANCOVA). Као коваријат узет је резултат на иницијалном мерењу. Израчуната коваријанса између група ($F(1,137)=365,449$; $p < 0,001$) одбацује сумњу да су разлике резултат деловања примењеног методичког приступа (табела 3). Потврду јачине утицаја експерименталног програма даје нам и добијени парцијални ета-квадрат (0,727) који указује на велики утицај методичког приступа (Cohen, 1988, према: Pallant, 2011). Осим тога, утврђена је јака веза између резултата испитивања утицаја примењеног методичког приступа на самостално решавање проблемских задатака пре и после деловања експерименталног приступа (парцијални ета-квадрат износи 0,849).

Табела 3. Анализа коваријансе

Зависна варијабла: финални тест

Извор варијације	Тип III Сума квадрата	df	Средња вред. квадрата	F	p	Парцијални ета квадрат
Кориговани модел	2875.102 ^a	2	1437.551	574.881	.000	.894
Константни члан	356.708	1	356.708	142.649	.000	.510
Иницијални тест	1932.135	1	1932.135	772.666	.000	.849
Група	913.845	1	913.845	365.449	.000	.727
Грешка	342.583	137	2.501			
Укупно	11580.000	140				
Корекција сума	3217.686	139				

Добијени резултати и њихова анализа упућују на закључак да пропедевтичко учење разломака, засновано на вертикалној интеграцији садржаја, у почетној настави математике остварује знатне ефекте на успешност ученика у самосталном решавању проблемских задатака.

Примена знања у решавању задатака у реалистичном контексту

Осим наведеног, желели смо да испитамо и да ли примењени методички приступ утиче на примену стечених знања при решавању задатака у реалистичном

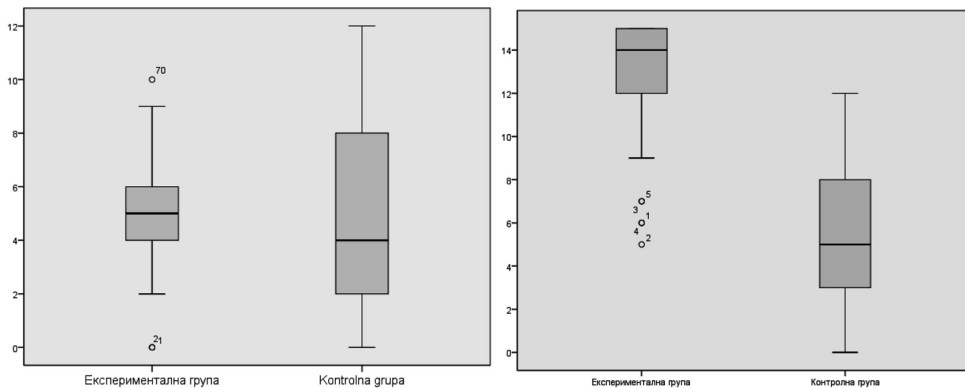
контексту. Увидом у *табелу 4.* увиђамо да су на иницијалном тестирању обе групе ученика постигле просечно једнак број поена (експериментална ($M=4,81$; $Sd=1,739$), контролна група ($M=4,81$; $Sd=3,281$)), при чему је међу ученицима контролне групе било већих осцилација у просечном броју поена. Израчуната варијанса ($F(1,138)=0,000$; $p=1,000$) показује да не постоји статистички значајна разлика у успеху ученика у решавању задатака датих у реалистичном контексту (табела 5).

Табела 4. Дескриптивни показатељи успешности експерименталне и контролне групе

Тест	Група	M	SD	Std.Er.	Min	Max
Иницијални тест	Експериментална	70	4.81	1.739	.208	0
	Контролна	70	4.81	3.281	.392	0
	Укупно	140	4.81	2.616	.221	0
Финални тест	Експериментална	70	13.06	2.559	.306	5
	Контролна	70	5.50	3.391	.405	0
	Укупно	140	9.28	4.831	.408	0

На финалном мерењу ученици експерименталне групе били су знатно успешнији у решавању задатака датих у реалистичном контексту у односу на иницијално мерење ($M=13,06$; $Sd=2,559$), али и у односу на ученике контролне групе ($M=5,50$; $Sd=3,391$) (табела 4, графикон 2).

Графикон 2. Графички приказ поређења резултата Е и К групе на решавању задатака у реалистичном контексту



Варијанса на финалном мерењу између експерименталне и контролне групе ($F(1,138)=221,513$; $p<0,001$) упућује на закључак да су разлике између група статистички значајне, што показује да је експериментални програм битно утицао на успешност ученика у решавању задатака у реалистичном контексту.

Табела 5. Анализа варијансе

Тест	Извор варијације	Сума квадрата	df	Средња вред. квадрата	F	p
Иницијални тест	Између група	.000	1	.000	.000	1.000
	Унутар група	951.171	138	6.893		
	Укупно	951.171	139			
Финални тест	Између група	1998.864	1	1998.864	221.513	.000
	Унутар група	1245.271	138	9.024		
	Total	3244.136	139			

Израчуната коваријанса ($F(1,137)=845,922$; $p < 0,001$) потврђује добијене резултате о напредовању ученика експерименталне групе под утицајем примењеног методичког приступа и одбацује сумњу да се разлике јављају као последица неуједначености група (табела 6). Парцијални ета-квадрат (0,861) показује да је утицај методичког приступа велики (Cohen, 1988, према: Pallant, 2011), као и да постоји јака веза између резултата испитивања утицаја методичког приступа на примену знања у решавању задатака у реалистичном контексту пре и после његове примене (0,740).

Табела 6. Анализа коваријансе

Извор варијације	Тип III Сума квадрата	df	Средња вред. квадрата	F	p	Парцијални ета квадрат
Кориговани модел	2920.413 ^a	2	1460.206	617.962	.000	.900
Константан члан	654.084	1	654.084	276.809	.000	.669
Иницијални тест	921.549	1	921.549	390.001	.000	.740
Група	1998.864	1	1998.864	845.922	.000	.861
Грешка	323.723	137	2.363			
Укупно	15297.000	140				
Корекција сума	3244.136	139				

На основу наведеног намеће се закључак да методичка трансформација садржаја о разломцима пропедевтичким учењем, заснованог на интеграцији садржаја математике, значајно утиче на успешност ученика у примени стечених знања у решавању задатака у реалистичном контексту.

Закључак

У раду је представљен методички приступ увођења садржаја о разломцима који подразумева пропедевтичко учење засновано на интеграцији садржаја математике у млађим разредима основне школе. Пропедевтичким учењем у основном математичком образовању ученици правовремено упознају садржаје који им омогућују самосталност и активност у процесу учења. Осим тога, рационализује се и олакшава наставак учења

математике, али и чини ефикаснијим приступ настави и учењу математике у старијим разредима основне школе. У раду смо желели да испитамо да ли овакав методички приступ садржајима у почетном математичком образовању унапређује квалитет знања ученика, сагледавајући то кроз успешност ученика у самосталном решавању проблемских задатака и решавању задатака у реалистичном контексту.

Резултати добијени у експерименталном истраживању показују да продедевтичко учење садржаја о разломцима у млађим разредима основне школе, засновано на интеграцији садржаја математике, знатно утиче на успешност ученика у самосталном решавању проблемских задатака и примени стечених знања у решавању задатака датих у реалистичном контексту.

Овакви налази указују на потенцијалне добити оваквог приступа. Пре свега, треба имати у виду да ученици у процесу учења и решавања задатака у контексту интегрисаних садржаја испољавају највиши ниво квалитета знања. Приметимо да су овакви задаци у често на међународним тестирањима (као што су PISA, TIMSS). Очигледно је да се сматра да (не)успешно решавање оваквих задатака указује на ниво математичке писмености. Стога добијени резултати засигурно иду у прилог предложеном методичком приступу који подразумева продедевтичко учење засновано на интеграцији садржаја математике. Претпостављамо да би ученици, радећи по наведеном методичком приступу, већ од првог разреда основне школе постигли још боље резултате и да би ефекти оваквог начина рада и формирања појмова резултирали још бољим успехом ученика.

Међутим, треба имати у виду да сама имплементација продедевтичког учења има извесних ограничења (Reinhard, 1991). Овакав облик учења захтева компетентног, мотивисаног и креативног учитеља, који ће на одговарајући начин умети да га планира, организује и реализује у наставној пракси, али и прилагођен програм и уџбенике математике који ће бити у складу са принципима оваквог рада. Резултати овог истраживања могу користити учитељима, наставницима математике у креирању праксе математичког образовања, али и ауторима уџбеника у изналажењу одговарајућих решења у уџбеницима који подразумевају дубље и садржајније повезивање садржаја математике како унутар саме математике тако и са другим областима сазнања.

Литература

- Ball, D. (1993). Halves, Pieces, and Twoths: Constructing and Using Representational Contexts in Teaching Fractions. In T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp. 157-196). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Behr, M., Harel, G., Post, T. & Lesh, R. (1992). Rational Number, Ratio, Proportion. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 296-333). New York: Macmillan Publishing.
- Berlin, D. F. & White, A. L. (1995). Connecting School Science and Mathematics. In P. A. House & A. F. Coxford (Eds.), *Connecting Mathematics across the Curriculum* (pp. 22-33). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- Clements, D. H., Sarama, J. & DiBiase, A. M. (2003). *Engaging Young Children in Mathematics: Findings of the 2000 National Conference on Standards for Preschool and Kindergarten Mathematics Education*. Mahwah, N. J.: Erlbaum.
- Cramer, K. & Henry, A. (2002). Using Manipulative Models to Build Number Sense for Addition and Fractions. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions* (pp. 41-48). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Early Childhood Mathematics: Promoting Good Beginnings* (2002) NAEYC & NCTM: National Association for the Education of Young Children and National Council of Teachers of Mathematics. Retrieved May 10, 2013 from the World Wide Web www.naeyc.org/about/positions/pdf/psmath.pdf
- English, L. D. (1999). Reasoning by Analogy: A Fundamental Process in Children's Mathematical Learning. In Stiff L. V. & Curcio F. R. (Eds.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Fisher, B. (1991). *Joyful Learning: A Whole Language Kindergarten*. Portsmouth, N.H.: Heinemann.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
- Frykholm, J. & Glasson, G. (2005). Connecting Science and Mathematics Instruction: Pedagogical Context Knowledge for Teachers. *School Science and Mathematics*, Vol. 105, No. 3, 127-141.
- Gleizer, D. G. (1997). Geometrija u školi: problemi i prosuđivanja. *Norma*, God. 3, Br. 1-2, 9-20.
- Jordan, N. C., Kaplan, D., Nabors Olah, L. & Locuniak, M. (2006). Number Sense Growth in Kindergarten: A Longitudinal Investigation of Children at Risk for Mathematics Difficulties. *Child Development*, Vol. 77, No. 1, 153-175.
- Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- Koirala, H. P. & Bowman, J. K. (2003). Preparing Middle Level Preservice Teachers to Integrate Mathematics and Science: Problems and Possibilities. *School Science and Mathematics*, Vol. 145, Br. 10, 145-154.
- Kostelnik, M. J., Soderman, A. K. & Whiren, A. P. (2004). *Developmentally Appropriate Curriculum: Best Practices in Early Childhood Education*. New Jersey: Merrill.
- Krekić, V. (2007). *Savremene metodičke transformacije elemenata kombinatorike u početnoj nastavi matematike* (doktorska disertacija). Beograd: Učiteljski fakultet Univerziteta u Beogradu.
- Lazić, B. (2014). *Propedevtičko uvođenje sadržaja o razlomcima u aritmetici za mlađe razrede osnovne škole* (doktorska disertacija). Beograd: Učiteljski fakultet Univerziteta u Beogradu.
- Lazić, B. i Petojević, A. (2014). Proširivanje sadržaja o razlomcima u mlađim razredima osnovne škole. U M. Pikula (ur.), *Nauka i globalizacija 3* (str. 65-78). Pale: Filozofski fakultet.
- Lazić, B., Milinković, J. & Petojević, A. (2012). Connecting Mathematics in Propaedeutic Exploration of the Concept of Fraction in Elementary Grades. In N. Branković (Ed.), *Theory and Practice of Connecting and Integrating in Teaching and Learning Process* (pp. 123-137). Sombor: Pedagoški fakultet u Somboru Univerziteta u Novom Sadu.
- Mičić, V. (2010). Od prirodnih do realnih brojeva u starijim razredima osnovne škole. *Nastava matematike*, God. 55, Br. 1-2, 20-29.
- Milinković, J. (2011). Elementi integrativnog pristupa u udžbenicima. *Inovacije u nastavi*, God. 24, Br. 1, 53-63.

- Pallant, J. (2011). *SPSS: priručnik za preživljavanje*. Beograd: Mikro knjiga.
- Polya, G. (1980). *Schule des Denkens*, Bern und München: Francke Verlag.
- Principles and Standards for School Mathematics* (2000). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Randall, C. (2005). Big Ideas and Understandings as the Foundation for Elementary and Middle School Mathematics. *Journal of Mathematics Education Leadership*, Vol. 8, No. 1, 9-24.
- Spremić, A. (2007). Integrativna nastava. *Obrazovna tehnologija*, God. 7, Br. 1-2, 6-19.
- Špijunović, K. & Maričić, S. (2012). The Integration of Mathematics Content and the Improvement of Teaching in Combined Classes. In N. Branković (Ed.), *Theory and Practice of Connecting and Integrating in Teaching and Learning Process* (pp. 279-291). Sombor: Pedagoški fakultet u Somboru Univerziteta u Novom Sadu.
- Špijunović, K. i Maričić, S. (2011). Vertikalna integracija sadržaja matematike u funkciji racionalnije organizacije rada u kombinovanom odeljenju. U R. Kuzmanović (ur.), *Spomenica akademika Veselina Perića* (str. 575-583). Banja Luka: Akademija nauka i umetnosti Republike Srpske.
- Watt, H. M. G. (2004). Development of Adolescents' Self-Perceptions, Values and Task Perceptions According to Gender and Domain in 7th through 11th Grade in Australian Students. *Child Development*, Vol. 75, No. 5, 1556-1574.
- Whitin, D. J. & Whitin, P. (2004). *New Visions for Linking Literature and Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Подаци о ауторима

Др Бојан Лазих је асистент на Педагошком факултету у Сомбору Универзитета у Новом Саду.
E-mail: lazicbsaa@yahoo.com

Др Сања Маричић је доцент на Учитељском факултету у Ужицу Универзитета у Крагујевцу.
E-mail: sanjamaricic10@gmail.com

Др Јасмина Милинковић је ванредни професор на Учитељском факултету Универзитета у Београду.
E-mail: jasmina.milinkovic@uf.bg.ac.rs