

NUMERIČKA SIMULACIJA TRAJEKTORIJE ŠIRENJA PRSKOTINE

NUMERICAL SIMULATION OF CRACK PATH PREDICTION

Mr Katarina Maksimović i Prof. dr Stevan Maksimović
Vojnotehnički institut, Ratka Resanovića 1, Beograd
s.maksimovic@net.yu



Rezime: Rad je usmeren na razvoj numeričkog modela za analizu širenja prskotine. Primarna pažnja usmerena je na određivanje trajektorije širenja prskotine. U ovom radu kriterijum maksimalnog normalnog napona upravno na pravac širenja prskotine je korišćen. Za određivanje faktora intenziteta napona korišćeni su specijalni konačni elementi.

Ključne reči: Zamor konstrukcija, mehanika loma, Numerički model, Modeliranje putanje širanja prskotine, Konačni elementi, Metalne konstrukcije.

1. UVOD

Pri analizi čvrstoće na zamor konstrukcija u osnovi postoje dve primarne pojave koje na osnovu kojih se vrši procena ukupnog veka. Prva se odnosi na procenu veka strukturalnih elemenata, pod dejstvom cikličnih opterećenja do pojave, inicijalne prskotine. Druga se odnosi na procenu veka u prisustvu prskotina. Ova poslednja pojava podrazumeva analizu širenja prskotine. Većina dosadašnjih istraživanja u oblasti širenja prskotine, bilo eksperimentalno ili numerički, odnosila su se na analize širenja prskotine kod kojih je ciklično opterećenje delovalo normalno na pravac inicijalne prskotine. To u osnovi pretpostavlja da se pravac širenja prskotine ne menja. Ovim se znatno pojednostavljuje procedura za analizu širenja prskotine a time i sama procena veka odnosno preostala čvrstoća na zamor. Međutim, kada se radi o realnim konstrukcijama pogotovo kada se radi o avionskim gotovo redovno se radi o cikličnim opterećenjima čiji pravac delovanja nije okomit na inicijalnu prskotinu. U ovim slučajevima pravac prostiranja prskotine nije unapred poznat već ga je potrebno odrediti. Numerička procedura se znatno usložnjava jer je neophodno uvesti odgovarajuće kriterijume za određivanje pravca

Abstract: The paper focuses to develop numerical method for the crack growth. Primary attention focuses on developing computation method for the crack path prediction. The maximum hoop stress criterion is used for the crack growth direction. For determination of the stress intensity factors an special singular finite elements are used.

Key words: Fatigue of structure, Fracture mechanics, Numerical model, Computational crack path prediction, Finite Elements, Metal structures.

prostiranja prskotine. Za tu svrhu neophodno je koristiti inkrementalne numeričke tehnike pri

čemu se posle svakog inkrementa dužine prskotine mora definisati pravac prostiranja prskotine. Izbor adekvatnog kriterijuma, koji definiše pravac prostiranja prskotine, je važan i zahteva dobro poznavanje ponašanje karakteristika materijala pri cikličnim opterećenjima. Kada se radi o analizi širenja prskotine primenom metode konačnih elemenata (MKE) poseban problem predstavlja zahtev reformulacije mreže konačnih elemenata posle svakog inkrementa pomeranja. Neki pregledi primene MKE u kvazi-statici i širenju zamorne prskotine date su u referencama^{1,2}.

2. KRITERIJUMI ZA DEFINISANJE PRAVCA PROSTIRANJA PRSKOTINE

Za strukturalne elemente sa prskotinom, pod dejstvom cikličnih opterećenja, važno je odrediti trajektoriju duž koje se prskotina širi. To je prvi uslov za kvalitetnu numeričku analizu preostale čvrstoće. Kao što je pomenuto kod numeričke simulacije širenja prskotine za mešoviti mod opterećenja, pored $FIN K_I$, javlja se i $FIN K_{II}$ a u opštem slučaju i $FIN K_{III}$.

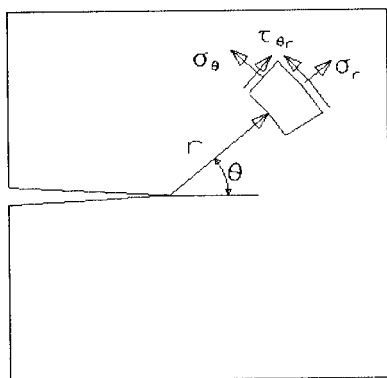
Postoji više teorija na kojima baziraju pojedini kriterijumi za moguće pravce iniciranja prskotine. U osnovi kriterijumi se mogu svrstati u tri grupe i to: i) kriterijumi bazirani na naponima, ii) kriterijumi

bazirani na energiji i iii) kriterijumi bazirani na deformaciji. Kritični uslovi za određivanje ugla orijentacije prskotine θ_{ci} za dati inkrement dužine prskotine Δa_i dobijaju se iz ekstremnih vrednosti izraženih preko parametara: napona, energije ili deformacije. Značajan broj kriterijuma izveden je koristeći napone i energiju a manji broj na bazi deformacija. Mada i pored većeg broja izvedenih kriterijuma ne može se reći da je obezbeđena opštost primene. Većina ovih kriterijuma daje upotrebljive rezultate za ograničene domene primene. Domen primene je primarno vezan za mehaničke karakteristike materijala. Većina ovih kriterijuma daje dobre rezultate za krte materijale. Ne ulazeći u domen valjanosti pojedinih kriterijuma ovde će se koristiti kriterijum koji daje dobre rezultate i za materijale koji imaju nelinearno ponašanje kakvi su u osnovi metali. U ovom radu se koristi kriterijum MTS koji je izveden iz uslova ekstrema tangentsnog normalnog napona, σ_θ , duž konstantne vrednosti radijusa r oko vrha prskotine, Sl. 2.1.

2.1 MTS-kriterijum za definisanje inicijalnog ugla širenja prskotine

MTS kriterijum³ pretpostavlja da se pravac iniciranja prskotine, određen preko θ_{ci} Sl. 2.2, poklapa sa pravcem maksimalnog tangentsnog normalnog napona duž konstantnog radijusa oko vrha prskotine. Za definisanje samog kriterijuma MTS koriste se izrazi za naponsko stanje u zoni oko vrha prskotine. Polje napona u vrhu prskotine, definisano u polarnom koordinatnom sistemu r i θ , Sl. 2.1, ima oblik

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ \left[\frac{K_I}{2} \cos \frac{\theta}{2} (1 + \cos \theta) \right] - \left[\frac{3K_{II}}{2} \sin \frac{\theta}{2} (1 + \cos \theta) \right] \right\}, \\ \sigma_r &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ \left[\frac{K_I}{2} \cos \frac{\theta}{2} (3 - \cos \theta) \right] - \left[\frac{K_{II}}{2} \sin \frac{\theta}{2} (1 - 3 \cos \theta) \right] \right\} \quad (2.1) \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ \left[\frac{K_I}{2} \sin \frac{\theta}{2} (1 + \cos \theta) \right] - \left[\frac{K_{II}}{2} \cos \frac{\theta}{2} (1 - 3 \cos \theta) \right] \right\}.\end{aligned}$$



Sl. 2.1 Polje napona u polarnim koordinatama

Ovaj uslov se može matematički izraziti u obliku³:

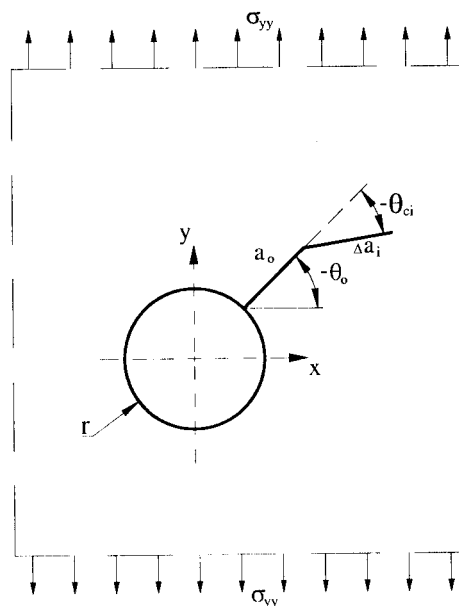
$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_\theta}{\partial \theta^2} < 0 \quad (2.2)$$

Zamenom izraza za polje napona (2.1) u (2.2) kriterijum MTS za određivanje ugla odnosno pravca prostiranja prskotine, θ_{ci} postaje

$$\begin{aligned}\tan^2 \frac{\theta}{2} - \frac{\mu}{2} \tan \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} &= 0 \\ (2.3) \\ -\frac{3}{2} \left[\left(\frac{1}{2} \cos^3 \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \left(\sin^3 \frac{\theta}{2} - \frac{7}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] &< 0 \text{ gde} \\ \text{je } \mu \text{ definisan kao}\end{aligned}$$

$$\mu = \frac{K_I}{K_{II}} \quad (2.4)$$

Na Sl. 2.2 prikazana je geometrijska interpretacija ugla orijentacije prskotine θ_{ci} za dati inkrement dužine prskotine Δa_i .



Sl. 2.2 Uglovi inicijacije prskotine duž trajektorije

Znači za svaki inkrement dužine prskotine Δa_i , shodno Sl. 2.2, koristeći relacije (2.3) određuje se ugao orijentacije prskotine θ_{ci} . Evidentno je da Ugao orijentacije prskotine zavisi od faktora intenziteta napona K_I i K_{II} pa je veoma bitno tačno njihovo sračunavanje. Za jednostavnije strukturalne elemente moguće je za određivanje faktore intenziteta napona koristiti analitičke metode. Međutim za složenije strukturalne elemente sa prskotinama neophodno je koristiti numeričke metode, poput MKE, za određivanje FIN.

3. ODREĐIVANJE FIN NAPONA PRIMENOM MKE

Ovde se prvenstveno misli na određivanje faktora intenziteta napona u okviru primene singularnih konačnih elemenata. Kada se dobiju rezultati analize MKE, gde se prvenstveno misli na dobijena pomeranja, na osnovu istih se mogu odrediti i faktori intenziteta napona. Treba istaći da se određivanje FIN primenom MKE prvenstveno koristi za određivanje "statičkih" rezervnih faktora čvrstoće sa aspekta dopustivih oštećenja a manje sa aspekta "dinamičkih" rezervnih faktora čvrstoće odnosno veka strukturalnih elementa izloženih cikličnim opterećenjima.

Principijelno, u MKE se koriste tri pristupa za određivanje faktora intenziteta napona, K , i to:

1. direktni metod⁴
2. indirektni metod⁵
3. metod J - integrala⁶

Direktni metod zasnovan je na korišćenju specijalno formulisanih konačnih elemenata koji u svojoj formulaciji sadrži K_I i K_{II} (mod I i II faktora intenziteta) kao direktne nepoznate⁴.

U ovom radu pažnja je usmerena na indirektni metod. Kod istoga su vrednosti faktora intenziteta napona dobijeni korišćenjem sračunatih pomeranja u konačnim elementima oko vrha prskotine.

Kod indirektnog metoda, analitička rešenja komponenti pomeranja u blizini vrha prskotine mogu biti izražena preko:

$$u = \frac{K_I}{4 \cdot G} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \left\{ \cos \beta \cdot \left[(2 \cdot k - 1) \cdot \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3 \cdot \theta}{2} \right] - \sin \beta \cdot \left[(2 \cdot k - 1) \cdot \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3 \cdot \theta}{2} \right] \right\} +$$

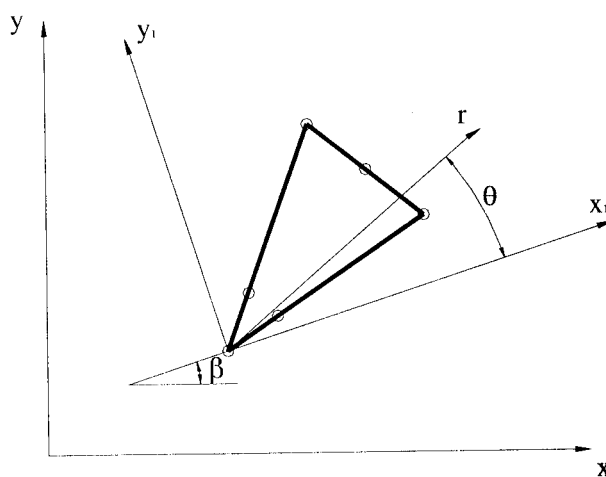
$$+ \frac{K_{II}}{4 \cdot G} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \left\{ \cos \beta \cdot \left[(2 \cdot k + 3) \cdot \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3 \cdot \theta}{2} \right] + \sin \beta \cdot \left[(2 \cdot k - 1) \cdot \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3 \cdot \theta}{2} \right] \right\} + 0(r)$$

(3.1)

$$v = \frac{K_I}{4 \cdot G} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \left\{ \sin \beta \cdot \left[(2 \cdot k - 1) \cdot \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3 \cdot \theta}{2} \right] + \cos \beta \cdot \left[(2 \cdot k + 1) \cdot \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3 \cdot \theta}{2} \right] \right\} +$$

$$+ \frac{K_{II}}{4 \cdot G} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \left\{ \sin \beta \cdot \left[(2 \cdot k + 3) \cdot \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3 \cdot \theta}{2} \right] - \cos \beta \cdot \left[(2 \cdot k - 3) \cdot \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3 \cdot \theta}{2} \right] \right\} + 0(r)$$

U gornjoj jednačini (3.1), r i θ su polarne koordinate čiji je koordinatni početak u vrhu prskotine, dok je β - ugao orijentacije prskotine, Sl. 3.1; G je modul smicanja, dok je $k = 3 - 4 \cdot \nu$ za ravno stanje deformacije i $k = \frac{(3 - \nu)}{(1 + \nu)}$ za ravno stanje



napona.

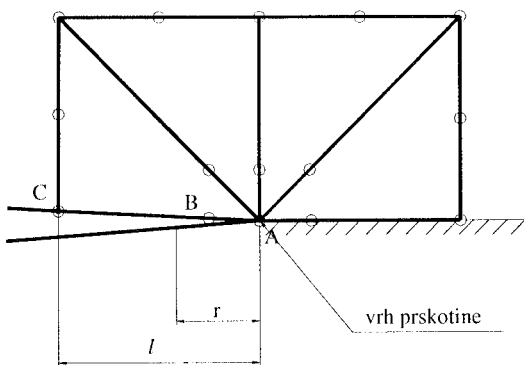
Sl. 3.1 Orijehtacija prskotine i konačnog elementa

Za slučaj kada je prskotina orjentisana duž ose $x_1 = x$, pomeranja na samoj prskotini mogu se odrediti zamenom $\beta = 0^\circ$, $\theta = \pm\pi$ u jednačini (3.1), tj.:

$$u = \pm \frac{K_{II} \cdot (k + 1)}{2 \cdot G \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \sqrt{r} + 0(r) \quad \text{i} \quad (3.2)$$

$$v = \pm \frac{K_I \cdot (k + 1)}{2 \cdot G \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \sqrt{r} + 0(r)$$

Ista pomeranja mogu biti izražena preko čvornih pomeranja A, B i C, Sl.3.2.



Sl. 3.2 Oznake čvorova singularnog elementa duž prskotine

$$u(r) = u_A + (-3 \cdot u_A + 4 \cdot u_B - u_C) \cdot \sqrt{\frac{r}{l}} + (2 \cdot u_A - 4 \cdot u_B + 2 \cdot u_C) \cdot \frac{r}{l} \quad (3.3)$$

$$v(r) = v_A + (-3 \cdot v_A + 4 \cdot v_B - v_C) \cdot \sqrt{\frac{r}{l}} + (2 \cdot v_A - 4 \cdot v_B + 2 \cdot v_C) \cdot \frac{r}{l}$$

Kada r postaje malo, faktori intenziteta napona mogu se dobiti poređenjem članova uz $\sqrt{r}$ u jednačinama (3.1) i (3.2), pri čemu se dobija:

$$K_I = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \pi \cdot G \cdot (4 \cdot v_B - v_C - 3 \cdot v_A)}{(k+1) \cdot \sqrt{l}} \quad (3.4)$$

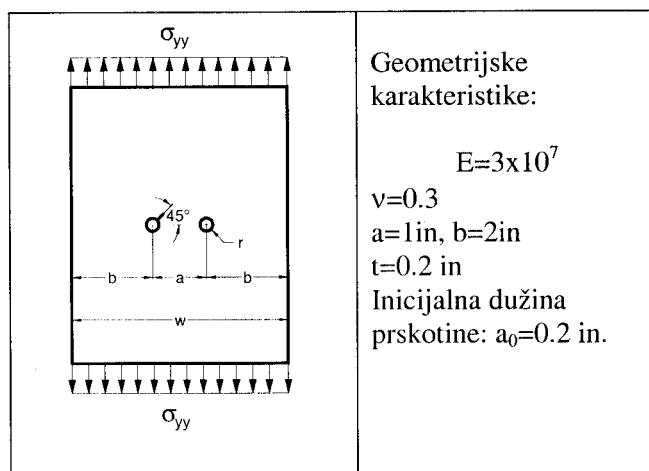
$$K_{II} = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \pi \cdot G \cdot (4 \cdot u_B - u_C - 3 \cdot u_A)}{(k+1) \cdot \sqrt{l}}$$

Iz gornje jednačine se jasno vidi da se faktori intenziteta napona (mod I i mod II) mogu dobiti kao rezultat "post-procesiranja". Napred opisani singularni 6-čvorni konačni element, Sl. 3.1, u praksi se pokazao kao jedan od najtačnijih konačnih elemenata za određivanje singularnih naprezanja u zoni oštećenja kao i samih FIN. Ovaj tip konačnog elementa je uključen u sve poznatije svetske softverske pakete koji su koncipirani na metodi konačnih elemenata. U toku izrade samog ovog rada izvršena su brojna testiranja tačnosti ovog singularnog konačnog elementa sa analitičkim i drugim dostupnim rešenjima. Dobijena je izvanredna tačnost ovog konačnog elementa i sa relativno grubom mrežom konačnih elemenata u zoni oštećenja. U cilju jednostavnijeg modeliranja mreže konačnih elemenata oko vrha prskotine

često se od ovih konačnih elemenata formira jedan "super-element". Na Sl. 3.2 prikazana je jedna polovina super-elementa sastavljena od četiri singularna 6-čvorna konačna elementa. Postojanje super-elementa ima samo praktičan značaj jer omogućuje jednostavnije modeliranje mreže konačnih elemenata u zoni singularnog naprezanja kao i samog određivanja FIN. Ovi specijalni 6-čvorni singularni konačni elementi su u ovom radu korišćeni za određivanje FIN za potrebe definisanje rezervnih faktora čvrstoće sa aspekta dopustivih oštećenja s jedne kao i za definisanje analitičkih izraza za FIN kod pojedinih strukturalnih elemenata s druge strane. U poglavlju 4 detaljno je prikazana primena ovih konačnih elemenata pri određivanju FIN kod strukture tipa oplave sa otvorima za zakivke u prisustvu inicijalnih oštećenja i za slučaj mešovitogmoda opterećenja. Detaljnija teorijska formulacija singularnih konačnih elemenata i njihova primena u određivanju FIN data je u radu⁷.

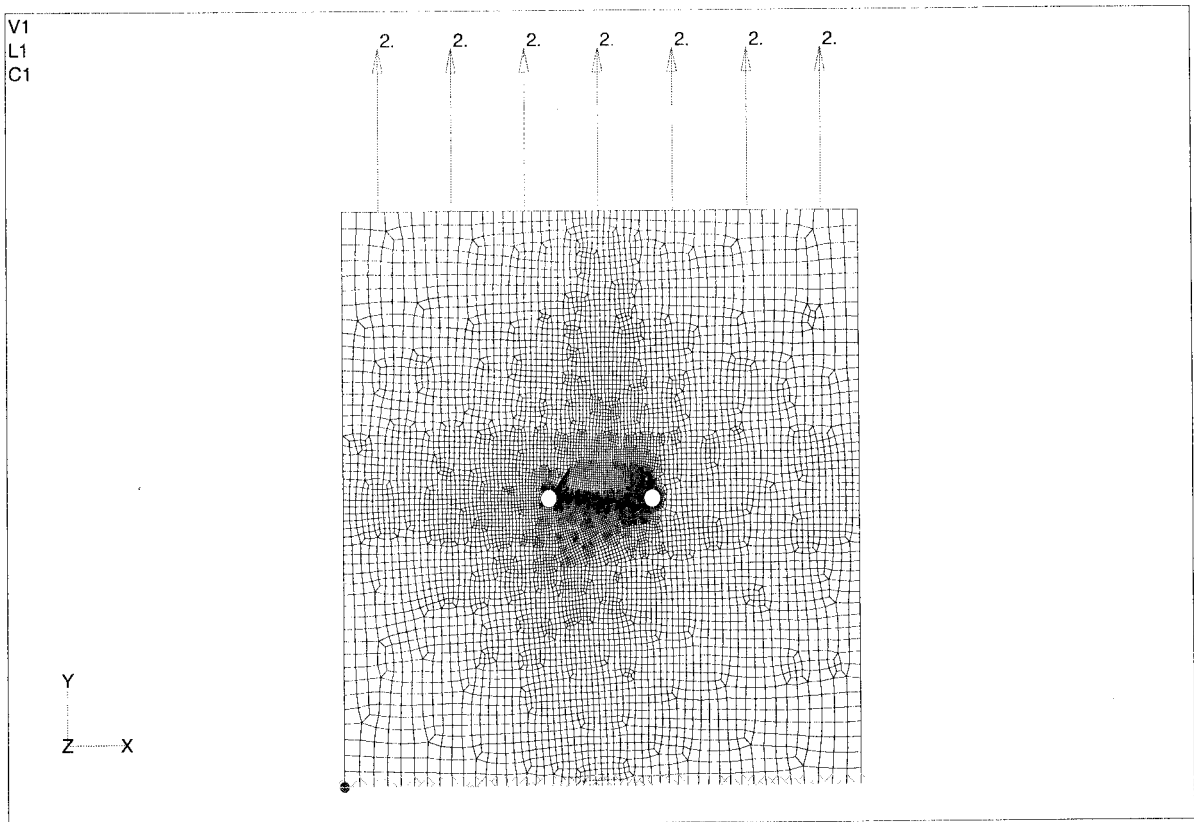
4. NUMERIČKA SIMULACIJA TRAJEKTORIJE ŠIRENJA PRSKOTINE

U cilju ilustracije uspostavljene numeričke procedure za simulaciju širenja prskotine za mešoviti mod opterećenja izabrana je ljuska sa dva otvora za zakivke, Sl. 4.1. Ovaj primer je u osnovi uzet iz literature i u poslednje vreme dosta se koristi upravo kod numeričke simulacije širenja prskotine odnosno za definisanje putanje širenja prskotine. Za razliku od primera iz literature ovde je razmatrana prskotina koja se javlja kod zakivka ali radijalno iz centra kruga zakivka dok je u literaturi prskotina data na desnoj ekstremnoj poziciji levog zakivka pod istim uglom. Na levom zakivku inicirana je prskotina dužine $a_0 = 0.2$ in, Sl. 4.1.

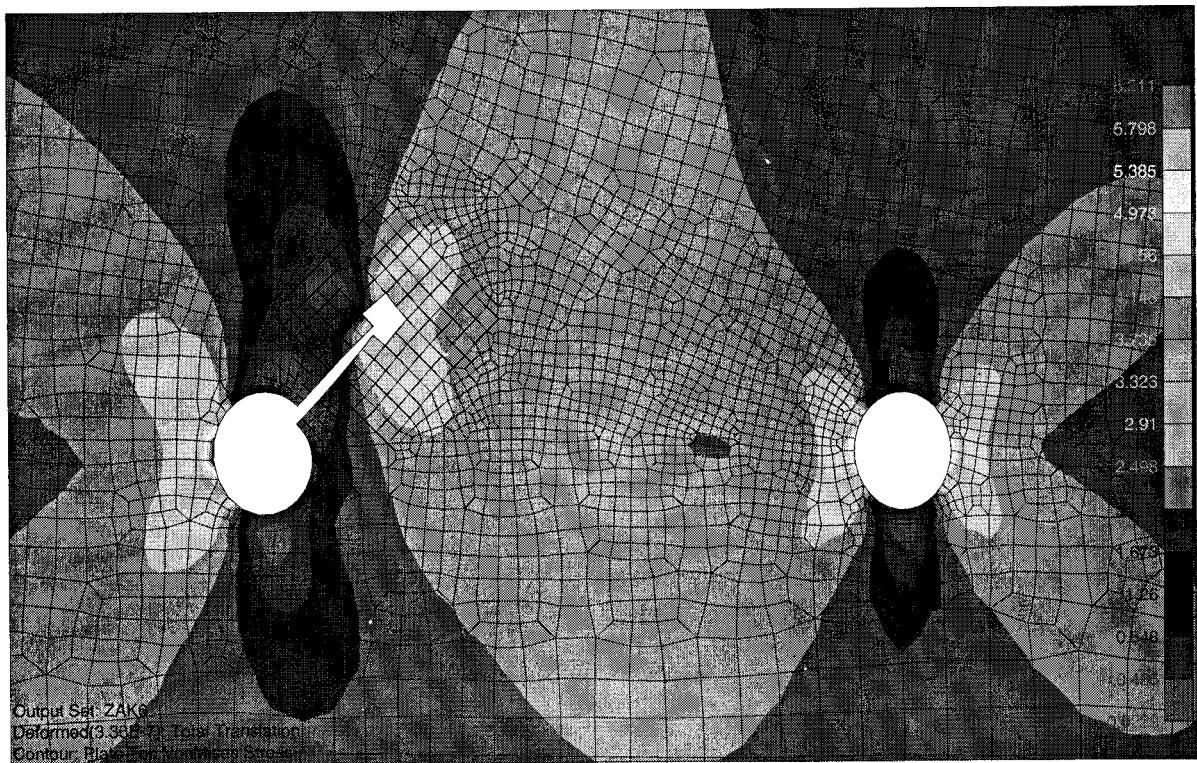


Sl. 4.1 Polje oplave sa dva zakivka u prisustvu prskotine

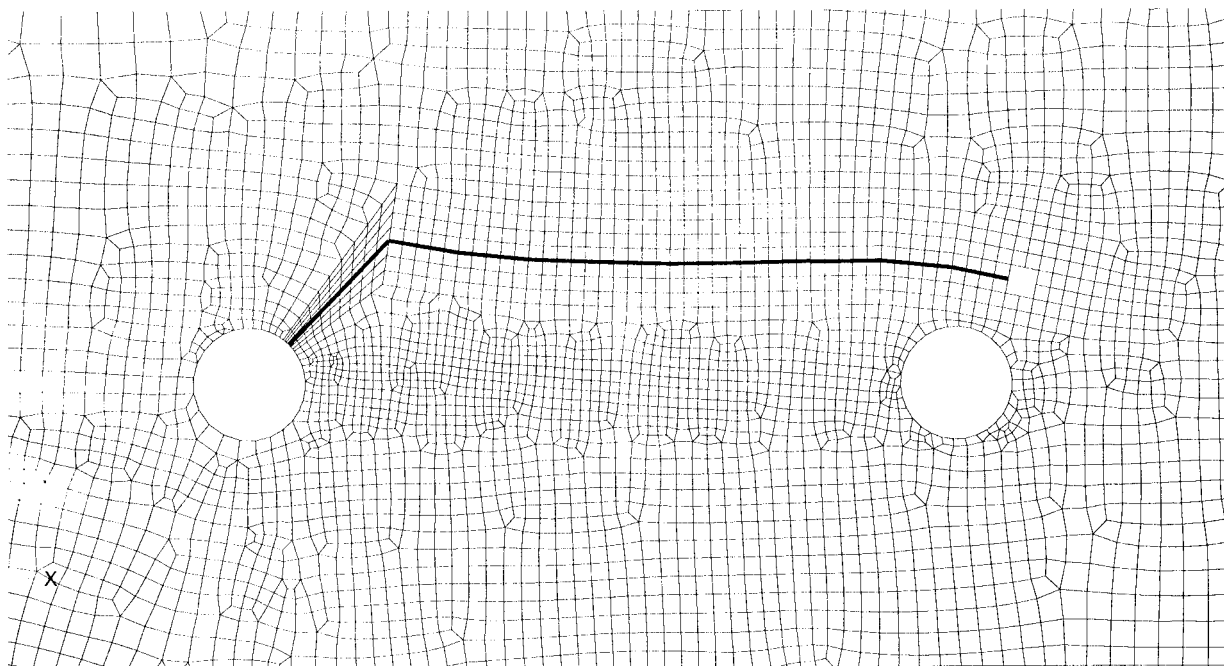
Na Sl. 4.2 prikazan je model konačnih elemenata sa inicijalnom prskotinom.



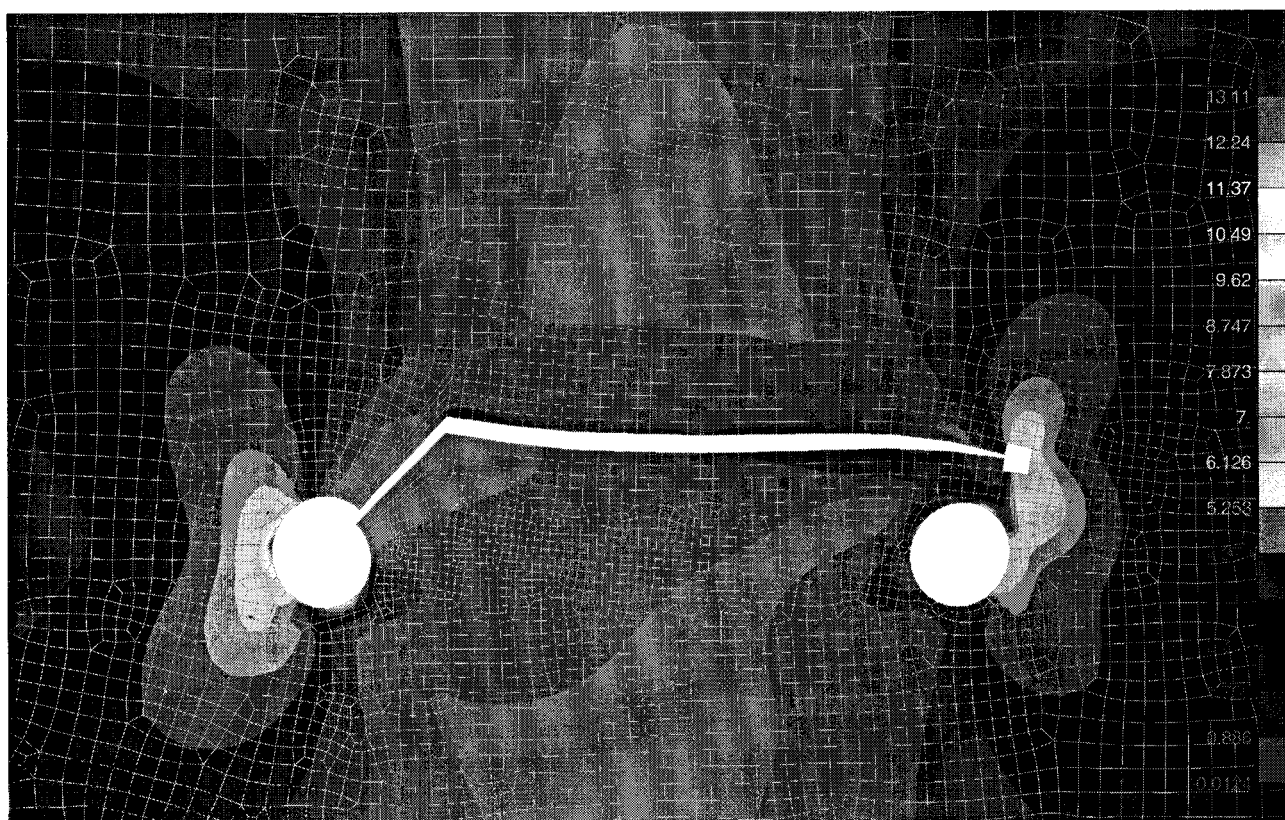
Sl. 4.2 Mreža konačnih elemenata polja oplata sa dva zakivka i prskotinom na levom zakivku



Sl. 4.3 Raspodela napona u zoni prskotine i oko zakivaka



Sl. 4.4 Trajektorija širenja prskotine na nedeformisanoj mreži konačnih elemenata



Sl. 4.5 Trajektorija i raspodela napona u zoni prskotine i oko zakivaka posle 10-tog koraka

