

**ANALIZA KOLIČNIKA VREMENA AKTIVNE POPRAVKE
I UKUPNOG VREMENA POPRAVKE****THE QUOTIENT ANALYSIS OF THE ACTIVE REPAIR TIME
AND TOTAL REPAIR TIME****Dragana Raičković, dipl. ing.****REZIME**

U ovom radu, razmatran je količnik vremena aktivne popravke i ukupnog vremena popravke, kao slučajna promenljiva x . Pretpostavljeno je da ova slučajna promenljiva ima beta raspodelu u intervalu $[0,1]$, a ova hipoteza je potvrđena Pearsonovim ili hi-kvadrat testom saglasnosti. Za ovu svrhu specijalno je razvijen i korišćen računarski program. Praktična primena procedura ove analize pokazana je na jednom primeru.

Ključne reči: Vreme popravke, beta raspodela, parametar raspodele, tačkasta ocena, test saglasnosti.

SUMMARY

In this paper, the quotient of the active repair time and total repair time, as a random variable x , is considered. It is assumed that this random variable has the beta distribution in the interval $[0,1]$ and this hypothesis is verified by the Pearson conformity test. For this purpose, the specially computer program was developed and used. The practical application of these procedures is illustrated by one example.

Key words: Repair time, beta distribution, parameter distribution, point estimate, conformity test.

1. DEFINISANJE PROBLEMA

Pod vremenom aktivne popravke, nekog funkcionalnog proizvoda, koji se nalazi u stanju neispravnosti, podrazumeva se zbir vremena sledećih aktivnosti: demontaže, defektacije, popravke (otklanjanje kvara), montaže i testiranja. U ovo vreme ne uračunavaju se administrativno vreme, vreme dopremanja u servis ili vreme odlaska na mesto korišćenja, vreme nabavke potrebnih materijala i vreme čekanja zbog nekih drugih razloga. Pod ukupnim vremenom popravke podrazumeva se vreme od momenta nastanka otkaza posmatranog funkcionalnog proizvoda, pa do momenta njegovog dovođenja u ispravno stanje. Ovo je, dakle, kalendarsko vreme koje treba izraziti u satima [h]. Vreme aktivne popravke, koje se obično izražava u minutima, treba takođe izraziti u satima.

Sva ova gore pomenuta vremena su slučajne promenljive koje imaju svoj zakon raspodele. Zakon raspodele je nepoznat i on se mora pretpostaviti, a zatim na osnovu praktičnih istraživanja potvrditi saglasnost pretpostavljene sa empirijskom raspodelom slučajne promenljive. Najčešće se pretpostavlja da ova vremena imaju Vejbulovu raspodelu, jer je ova

raspodela, kao višeparametarska, veoma pogodna za fitovanje (uklapanje) u histogram ili empirijsku funkciju raspodele.

Pogodnim izborom vrednosti parametara raspodele utiče se na oblik krive funkcije raspodele i tako omogućava njeno uklapanje u histogram. Saglasnost pretpostavljene teorijske sa empirijskom raspodelom potvrđuje se pomoću poznatih testova saglasnosti, kao što su hi-kvadrat ili Pearson-ov test, Kolmogorov ili Smornov test.

Ako vreme aktivne popravke, kao i ukupno vreme popravke imaju Vejbulovu raspodelu, sa njima odgovarajućim parametrima, onda je potrebno naći raspodelu količnika ova dva vremena, tj. raspodelu nove slučajne promenljive. Analitičko određivanje ove raspodele je veoma složeno, pa je zgodnije da se pretpostavi zakon ove raspodele. Ono što se može lako primetiti to je da nova slučajna promenljiva ima vrednosti koje pripadaju intervalu $[0, 1]$. Ovo nas upućuje na to da možemo pretpostaviti da ova nova slučajno promenljiva ima beta raspodelu. Na osnovu rezultata iz prakse treba najpre odrediti vrednosti ocenjenih parametara ove raspodele, a zatim izvršiti test saglasnosti pretpostavljene teorijske, sa empirijskom raspodelom.

2. REŠAVANJE PROBLEMA

Pretpostavili smo da slučajna promenljiva x , koja predstavlja količnik vremena aktivne popravke, T_{apopr} , i ukupnog vremena popravke, T_{ukupno} , tj.

$$x = \frac{T_{apopr}}{T_{ukupno}}$$

ima beta raspodelu u intervalu $[0, 1]$, datu sledećim izrazom:

$$f(x) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1},$$

gde su a i b parametri raspodele, a $B(a,b)$ je potpuna beta funkcija, čije se vrednosti mogu naći u tablicama ili izračunati pomoću posebnog računarskog potprograma.

Potpuna beta funkcija može se odrediti i pomoću potpune gama funkcije, [5], na osnovu sledeće veze između ovih funkcija:

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Matematičko očekivanje ili srednja vrednost slučajne promenljive x koja ima beta raspodelu data je sledećim izrazom:

$$E(X) = m = \frac{a}{a+b}.$$

Varijansa slučajne promenljive x koja ima beta raspodelu data je sledećim izrazom:

$$V(X) = \sigma^2 = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}.$$

Rešavanjem poslednja dva izraza, kao dve jednačine, po parametrima a i b , dobija se

$$a = \frac{(1-m) \cdot m^2}{\sigma^2} - m$$

$$b = a \cdot \left(\frac{1-m}{m} \right) = \left[\frac{(1-m) \cdot m^2}{\sigma^2} - m \right] \cdot \left(\frac{1-m}{m} \right).$$

Srednja vrednost m i standardna devijacija σ mogu se aproksimirati sa njihovim tačkastim ocenama, koje se određuju pomoću sledećih izraza:

$$m \approx \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\sigma \approx s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

gde je x_i i -ta od n vrednosti koje je uzela slučajna promenljiva x .

Tako se na osnovu ovih tačkastih ocena za m i σ : $\bar{x}$ i s , respektivno, mogu odrediti tačkaste ocene za parametar a i b , pomoću sledećih izraza:

$$\hat{a} = \frac{(1-\bar{x}) \cdot \bar{x}^2}{s^2} - \bar{x}$$

$$\hat{b} = \hat{a} \cdot \left(\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}} \right) = \left[\frac{(1-\bar{x}) \cdot \bar{x}^2}{s^2} - \bar{x} \right] \cdot \left(\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}} \right).$$

Ova metoda određivanja tačkastih ocena parametara: $\hat{a}$ i $\hat{b}$ naziva se metoda momenata, jer se pri njihovom određivanju koristi prvi i drugi moment slučajne promenljive x .

Za proveru testa saglasnosti ovde je korišćena hi-kvadrat statistika koja se određuje pomoću sledećeg izraza:

$$X^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} \rightarrow \chi^2_\nu; \text{ za } n \rightarrow \infty$$

gde je n_i apsolutna učestanost, tj. broj vrednosti slučajne promenljive X koje su pale u i -tu klasu histograma; p_i je teorijska vrednost verovatnoće da slučajna promenljiva X padne u i -tu klasu histograma, k je ukupan broj klasa histograma, a n je ukupan broj vrednosti slučajne promenljive x .

3. ILUSTRATIVNI PRIMER

U toku praćenja aktivnosti održavajna i popravki u jednom servisu, dobijeni su sledeći podaci koji se odnose na: vremena aktivne popravke (Tabela 1.), ukupna vremena popravke (Tabela 2.) izražena u satima i odnos vremena tih vremena (Tabela 3.).

Za određivanje tačkastih ocena parametara a i b beta raspodele, kao i za proveru saglasnosti pretpostavljene teorijske sa empirijskom raspodelom urađen je računarski program u VISUAL BASIC-u. Unošenjem ovih podataka i aktiviranjem tog programa dobijeni su rezultati koji se mogu videti na sledećoj slici 1. Na ovoj slici prikazan je histogram slučajne promenljive x , kao i grafik ocenjene funkcije gustine beta raspodele u kojoj figurišu ocenjeni parametri $\hat{a}$ i $\hat{b}$, tj.

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{B(\hat{a}, \hat{b})} x^{\hat{a}-1} (1-x)^{\hat{b}-1}$$

Tabela 1. –Vremena aktivne popravke, T_{apopr} [h]					
1. 0.3333	2. 0.1333	3. 0.4167	4. 2.0000	5. 1.7500	6. 1.5833
7. 0.3333	8. 1.0000	9. 0.4167	10. 1.7500	11. 0.4167	12. 1.6667
13. 2.4167	14. 1.1667	15. 119.00	16. 4.0000	17. 1.0000	18. 1.2167
19. 2.5000	20. 1.5833	21. 0.2500	22. 0.6833	23. 1.7500	24. 1.3333
25. 3.6667	26. 1.5000	27. 0.5000	28. 1.9166	29. 1.0833	30. 0.8333
31. 1.0000	32. 2.1667	33. 1.3333	34. 2.0000	35. 1.1667	36. 1.4167
37. 1.0000	38. 0.3333	39. 1.7500	40. 0.7500	41. 2.0000	42. 1.0000

Tabela 2. –Ukupna vremena popravke, T_{ukupno} [h]					
1. 0.3333	2. 0.3333	3. 1.4167	4. 4.2000	5. 25.000	6. 2.0000
7. 1.0000	8. 1.0000	9. 37.333	10. 2.0000	11. 0.4167	12. 1.3333
13. 24.800	14. 1.6667	15. 121.00	16. 4.0000	17. 1.0000	18. 2.2167
19. 21.583	20. 1.9167	21. 0.2500	22. 0.9167	23. 2144.2	24. 1.3333
25. 4.1667	26. 1.5000	27. 0.5000	28. 1.9167	29. 1.3333	30. 0.8333
31. 1.3333	32. 2.6667	33. 1.6667	34. 2.1667	35. 1.1667	36. 1.5000
37. 1.0000	38. 0.3333	39. 1.8333	40. 0.7500	41. 2.0000	42. 49.000

Tabela 3. –Odnos vremena T_{apopr} i T_{ukupno} : T_{apopr} / T_{ukupno}					
1. 1.0000	2. 0.4000	3. 0.2941	4. 0.4762	5. 0.0700	6. 0.7917
7. 0.3333	8. 1.0000	9. 0.0111	10. 0.8750	11. 1.0000	12. 0.8750
13. 0.0974	14. 1.0000	15. 0.9835	16. 1.0000	17. 1.0000	18. 0.5488
19. 0.1158	20. 0.8261	21. 1.0000	22. 0.7454	23. 0.0008	24. 1.0000
25. 0.8800	26. 1.0000	27. 1.0000	28. 1.0000	29. 0.8125	30. 1.0000
31. 0.7500	32. 0.8125	33. 0.8000	34. 0.9231	35. 1.0000	36. 0.9444
37. 1.0000	38. 1.0000	39. 0.9545	40. 1.0000	41. 1.0000	42. 0.0204

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{B(\hat{a}, \hat{b})} x^{\hat{a}-1} (1-x)^{\hat{b}-1}.$$

$$\hat{m} = \frac{\hat{a}}{\hat{a} + \hat{b}}.$$

Tako se dobija da je $\hat{m} = 0.73255$.

Kao što se vidi, grafik ove funkcije dobro se fituje ili uklapa u histogram slučajne promenljive x , što ukazuje na to da se može usvojiti da ova slučajna promenljiva ima beta raspodelu sa parametrima: $a \approx \hat{a} = 0.457185$ i $b \approx \hat{b} = 0.166875$. Ovo je potvrđeno i primenom hi-kvadrat ili Pearson-ovim testom saglasnosti, gde se vidi da je statistika $X^2 = 5.041635$ i da je kvantil hi-kvadrat raspodele $\chi^2_{\nu; \alpha} = 7.814728$, gde je $\nu = 3$ i $\alpha = 0.05$. Pošto je $X^2 < \chi^2_{\nu; \alpha}$, to se može prihvatiti pretpostavka da slučajna promenljiva x ima beta raspodelu sa ocenjenim parametrima $\hat{a}$ i $\hat{b}$. Treba napomenuti da su ovde odbačene i dve vrednosti slučajne promenljive x , kao maloverovatne. Na slici se mogu videti i ocene za parametar početka A i parametar kraja B :

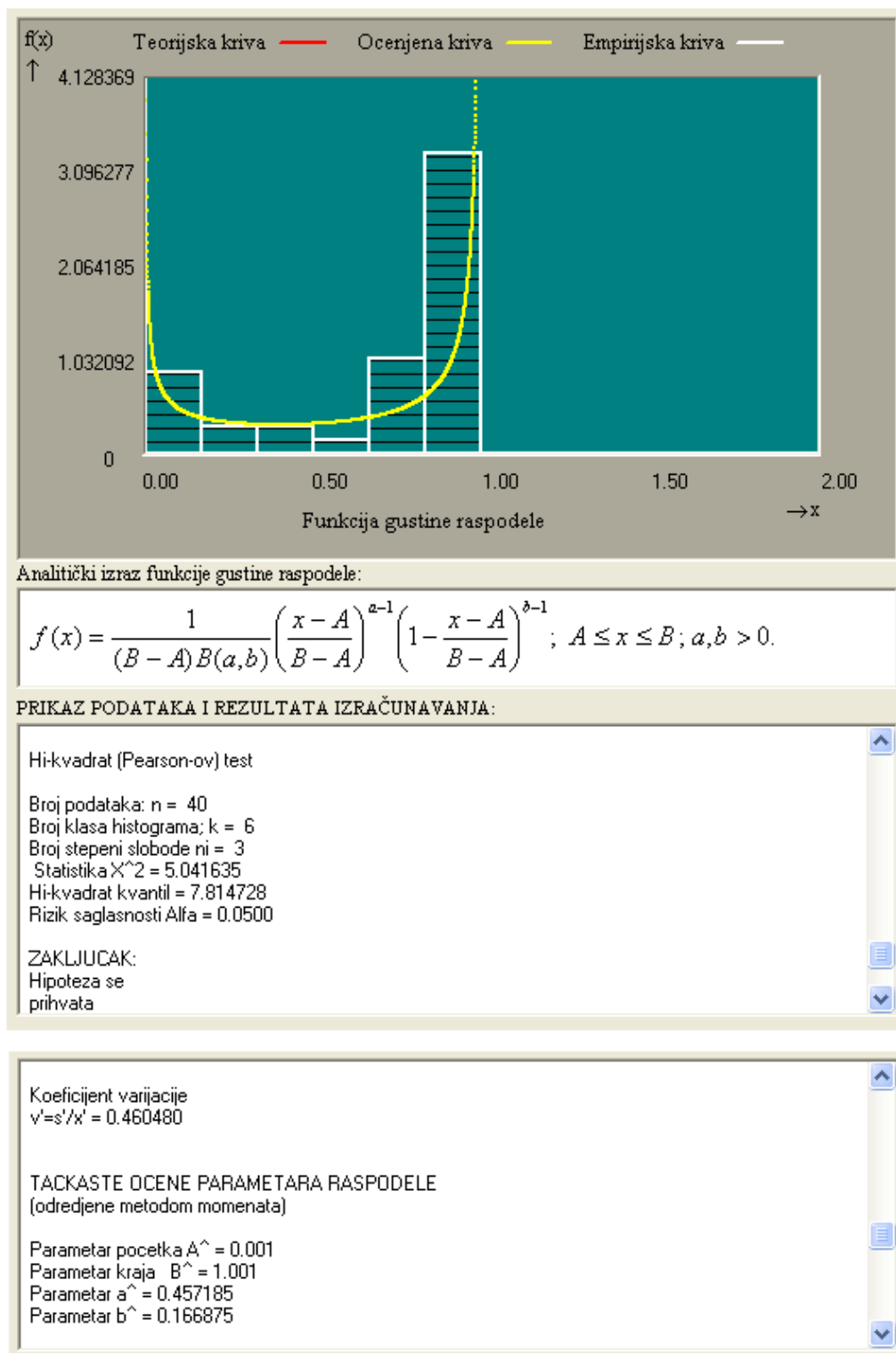
$\hat{A} = 0.001$ i $\hat{B} = 1.001$, pošto je program rađen za beta raspodelu u intervalu $[A, B]$.

Na osnovu poznatih vrednosti tačkastih ocena $\hat{a}$ i $\hat{b}$ može se odrediti i tačkasta ocena za srednju vrednost m , pomoću sledećeg izraza:

4. ZAKLJUČAK

Izložena analiza količnika vremena aktivne popravke i ukupnog vremena popravke pokazala je pomoću hi-kvadrat testa saglasnosti da ovaj količnik, kao slučajna promenljiva x , ima beta raspodelu u intervalu $[0, 1]$. Parametri ove raspodele: a i b određeni su u ovom radu primenom metode momenata, jer ova metoda je mnogo pogodnija za izračunavanje tačkastih ocena $\hat{a}$ i $\hat{b}$ nego neke druge poznate metode, kao što je, na primer, metoda maksimalne verodostojnosti.

Matematičko očekivanje ili srednja vrednost m slučajne promenljive x pokazuje da je prosečno vreme čekanja u servisu utoliko kraće ukoliko je srednja vrednost bliža jedinici. U navedenom primeru ova vrednost za m je $\hat{m} = 0.7325$, što ukazuje da je ova vrednost prihvatljiva jer je veća od 0.5. Pomoću računarskog programa izvršen je veći broj provera valjanosti ove pretpostavke da posmatrana slučajna promenljiva x ima beta raspodelu i kod svih provera ishod je bio afirmativan.



Sl.1 Grafik funkcije gustine beta raspodele

LITERATURA

- [1] P. Chapouille et R. De Pazzis, **Fiabilité des Systèmes**, Masson et Cie, Paris, 1968.
- [2] B. L. Van Der Waerden, **Mathematische Statistik**, Springer-Verlage, Berlin, 1965.
- [3] Branislav Ivanović, **Teorijska statistika**, Naučna knjiga, Beograd, 1979.
- [4] Marek Fisz, **Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik**, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1962.
- [5] D. S. Mitrović i D. Ž. Đoković, **Specijalne funkcije**, Građevinska knjiga, Beograd, 1964.