

ANALIZA VREMENA AKTIVNE POPRAVKE KAO DELA UKUPNOG VREMENA POPRAVKE

ANALYSIS OF THE ACTIVE REPAIR TIME AS THE PARTH OF TOTAL REPAIR TIME

Dragana Raičković, dipl. ing.

REZIME

U ovom radu, razmatrano je vreme aktivne popravke, kao slučajna promenljiva x . Pretpostavljeno je da ova slučajna promenljiva ima troparametarsku Vejbulovu raspodelu u intervalu $(0, +\infty)$, a ova hipoteza je potvrđena Pearson-ovim ili hi-kvadrat testom saglasnosti. Za ovu svrhu specijalno je razvijen i korišćen računarski program. Praktična primena procedura ove analize pokazana je na jednom primeru.

Ključne reči: Vreme aktivne popravke, Vejbulova raspodela, parametar raspodele, parametar položaja (početka), parametar razmere (skale), parametar oblika, tačkasta ocena, test saglasnosti.

SUMMARY

In this paper, the active repair time, as a random variable x , is considered. It is assumed that this random variable has the Weibull distribution in the interval $(0, +\infty)$ and this hypothesis is verified by the Pearson conformity test. For this purpose, the specially computer program was developed and used. The practical application of these procedures is illustrated by one example.

Key words: Repair time, Weibull distribution, parameter distribution, location parameter, scale parameter, shape parameter, point estimate, conformity test

1. DEFINISANJE PROBLEMA

Pod vremenom aktivne popravke, nekog funkcionalnog proizvoda, koji se nalazi u stanju neispravnosti, podrazumeva se zbir vremena sledećih aktivnosti: demontaže, defektacije, popravke (otklanjanje kvara), montaže i testiranja. U ovo vreme ne uračunavaju se administrativno vreme, vreme dopremanja u servis ili vreme odlaska na mesto korišćenja, vreme nabavke potrebnih materijala i vreme čekanja zbog nekih drugih razloga. Vreme aktivne popravke, koje se obično izražava u minutima, treba izraziti u satima [h].

Sva ova, gore pomenuta, vremena su slučajne promenljive koje imaju svoj zakon raspodele. Zakon raspodele je nepoznat i on se mora pretpostaviti, a zatim na osnovu praktičnih istraživanja potvrditi saglasnost pretpostavljene sa empirijskom raspodelom slučajne promenljive. Najčešće se pretpostav-

lja da ova vremena imaju Vejbulovu raspodelu, jer je ova raspodela, kao višeparametarska, veoma pogodna za fitovanje (uklapanje) u histogram ili empirijsku funkciju raspodele. Pogodnim izborom vrednosti parametara raspodele utiče se na oblik krive funkcije raspodele i tako omogućava njeno uklapanje u histogram. Saglasnost pretpostavljene teorijske sa empirijskom raspodelom potvrđuje se pomoću poznatih testova saglasnosti, kao što su hi-kvadrat ili Pearson-ov test, Kolmogorov ili Smirnov test

2. REŠAVANJE PROBLEMA

Pretpostavimo da vreme aktivne popravke, kao slučajna promenljiva x , ima Vejbulovu raspodelu, datu sledećim izrazom:

$$f(x) = \frac{c}{b} \left(\frac{x-a}{b} \right)^{c-1} \exp \left[- \left(\frac{x-a}{b} \right)^c \right]; a \geq 0, b, c > 0, x \geq a, \quad (1)$$

gde je a – parametar položaja ili početka, b – parametar razmere ili skale i c – parametar oblika.

Za određene vrednosti parametra oblika c ova raspodela ima oblik nekih drugih raspodela. Tako za $c = 1$ ova raspodela prelazi u eksponencijalnu raspodelu, a za $c > 3.5$ ova raspodela je približno jednaka normalnoj ili Gausovoj raspodeli.

Za $a = 0$, dobija se dvoparameterska Vejbulova raspodela čija funkcija gustine raspodele ima sledeći oblik:

$$f(x) = \frac{c}{b} \left(\frac{x}{b} \right)^{c-1} \exp \left[- \left(\frac{x}{b} \right)^c \right]; b, c > 0, x \geq 0. \quad (2)$$

Matematičko očekivanje ili srednja vrednost od x ove raspodele je

$$E(X) = m = b \cdot \Gamma \left(1 + \frac{1}{c} \right). \quad (3)$$

Varijansa od x ove raspodele je

$$V(X) = \sigma^2 = b^2 \cdot \Gamma \left(1 + \frac{2}{c} \right) - b^2 \cdot \left[\Gamma \left(1 + \frac{1}{c} \right) \right]^2, \quad (4)$$

gde je $\Gamma(\cdot)$ – potpuna gama funkcija čije se vrednosti mogu naći u tablicama ili izračunati pomoću posebnog računarskog podprograma.

Srednja vrednost m i standardna devijacija σ mogu se aproksimirati sa njihovim tačkastim ocenama, koje se određuju pomoću sledećih izraza:

$$m \approx \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (5)$$

$$\sigma \approx s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (6)$$

gde je x_i i -ta od n vrednosti koje je uzela slučajna promenljiva x .

Za pretpostavljenu raspodelu neophodno je odrediti vrednosti njenih parametara, tj. tačkaste ocene parametara. Za određivanje ovih tačkastih ocena postoji više metoda, kao što su: metoda maksimalne verodostojnosti, metoda najmanjih kvadrata, metoda momenata, metoda kvantila i dr. Pošto se ovde radi o troparameterskoj raspodeli primena ovih

metoda je vrlo komplikovana, pa je određivanje parametara izvršeno primenom simulacione metode Monte Karlo. Ova metoda je vrlo jednostavna, ali zahteva primenu računara, jer je potrebno izvršiti na stotine hiljada, pa i više od milion ponavljanja generisanja pseudoslučajnih brojeva i ponavljanja izračunavanja parametara raspodele.

Neka su a , b i c parametri funkcije gustine posmatrane pretpostavljene raspodele čije tačne ili teorijske vrednosti nisu poznate. Vrednosti ovih parametara određuju se na osnovu vrednosti koje je uzela slučajna promenljiva x . Vrednost za svaki od ovih parametara nalazi se u nekom intervalu. Širina ovog intervala mora se pretpostaviti tako da on sa vrlo velikom verovatnoćom prekriva tačnu ili teorijsku vrednost parametra.

Neka je A početak, a B kraj intervala koji prekriva nepoznatu vrednost parametra. Parametru se daje jedna pseudoslučajna vrednost koja pripada tom intervalu. Tako se za ocene parametara: a , b i c mogu koristiti sledeći izrazi:

$$\hat{a}_i = A_a + (B_a - A_a) \cdot r_i$$

$$\hat{b}_i = A_b + (B_b - A_b) \cdot r_i$$

$$\hat{c}_i = A_c + (B_c - A_c) \cdot r_i$$

gde se indeks i odnosi na vrednost ocenjenog parametra pri i -toj iteraciji, a r_i je pseudoslučajni broj koji pripada intervalu $(0,1)$. Ove vrednosti se unesu u izraz za teorijsku funkciju gustine raspodele:

$$f_j(x) = f(\hat{a}_i, \hat{b}_i, \hat{c}_i, x)$$

gde je j redni broj klase histograma, $j = 1, 2, \dots, k$ (k je ukupan broj klasa histograma).

Odrede se vrednosti ove funkcije za svaku vrednost x koja pripada sredini svake klase histograma. Ako histogram ima k klasa, onda imamo k vrednosti ove funkcije raspodele. Takođe se odrede i empirijske vrednosti ove funkcije za svaku od tih klasa, pomoću sledeće formule:

$$f_j = \frac{n_j}{n \cdot h}; j = 1, 2, \dots, k \quad (7)$$

gde je n_j – broj vrednosti koje su pale u j -tu klasu histograma, a n ukupan broj vrednosti koje je uzela slučajna promenljiva x .

Broj klasa k određuje se na osnovu sledeće formule:

$$k = 1 + 3.3 \log_{10} n \quad (8)$$

Razume se, za k se uzima celobrojna vrednost. Za određivanje vrednosti za k u statistici postoje i druge formule.

Širina klase h određuje se pomoću sledećeg izraza:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k} \quad (9)$$

gde su $x_{\min}$ i $x_{\max}$ najmanja i najveća vrednost koju je uzela slučajna promenljiva x .

Kada se za sredinu svake klase histograma odrede vrednosti f_j i $f_j(x)$, tada se odredi zbir kvadrata razlika ovih funkcija po klasama, pomoću sledeće formule:

$$S_i = \sum_{j=1}^k [f_j(x) - f_j]^2 \quad (10)$$

Kada se odredi prva vrednost S_1 , tada se generiše drugi pseudoslučajni broj r_i i istim postupkom odrede se parametri raspodele i odredi zbir S_2 i uporede se vrednosti ova dva zbira. Parametri raspodele, određeni ovako na slučajan način, zapamte se oni pri kojima je dobijen manji zbir kvadrata razlika ovih funkcija. Postupak se dalje nastavlja i određuje se novi zbir S i pamte parametri pri kojima je ovaj zbir najmanji. Postupak se mora ponoviti više puta od hiljadu do milion, pa i više puta.

Sa ovako određenim parametrima dobije se funkcija gustine raspodele koja se dosta dobro uklapa u histogram slučajne promenljive x , što ukazuje na to da su nepoznati parametri ove raspodele dobro ocenjeni primenom metode Monte Karlo.

Za slučaj troparametarske Vejbulove raspodele, određivanje njenih parametara primenom metode Monte Karlo, vrđi se na sledeći način:

$$\begin{aligned} \hat{a} &= |x_{\min} - 0.1 \cdot x_{\min} \cdot r_i| \\ \hat{b} &= |\bar{x} - x_{\min} + (\bar{x} - x_{\min}) \cdot r_i| \\ \hat{c} &= 0.4 + 19.6 \cdot r_i \end{aligned} \quad (11)$$

gde je $x_{\min}$ najmanja vrednost koju je uzela slučajna promenljiva x , $\bar{x}$ je srednja aritmetička vrednos i r_i ($r_i \in (0, 1)$) je pseudoslučajni broj koji se najčešće generiše pomoću random generatora računara.

Za proveru testa saglasnosti ovde je korišćena hi-kvadrat statistika koja se određuje pomoću sledećeg izraza:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} \rightarrow \chi_v^2; \text{ za } n \rightarrow \infty \quad (12)$$

gde je n_i apsolutna učestanost, tj. broj vrednosti slučajne promenljive X koje su pale u i -tu klasu histograma; p_i je teorijska vrednost verovatnoće da slučajna promenljiva X padne u i -tu klasu histograma, k je ukupan broj klasa histograma, a n je ukupan broj vrednosti slučajne promenljive x .

3. ILUSTRATIVNI PRIMER

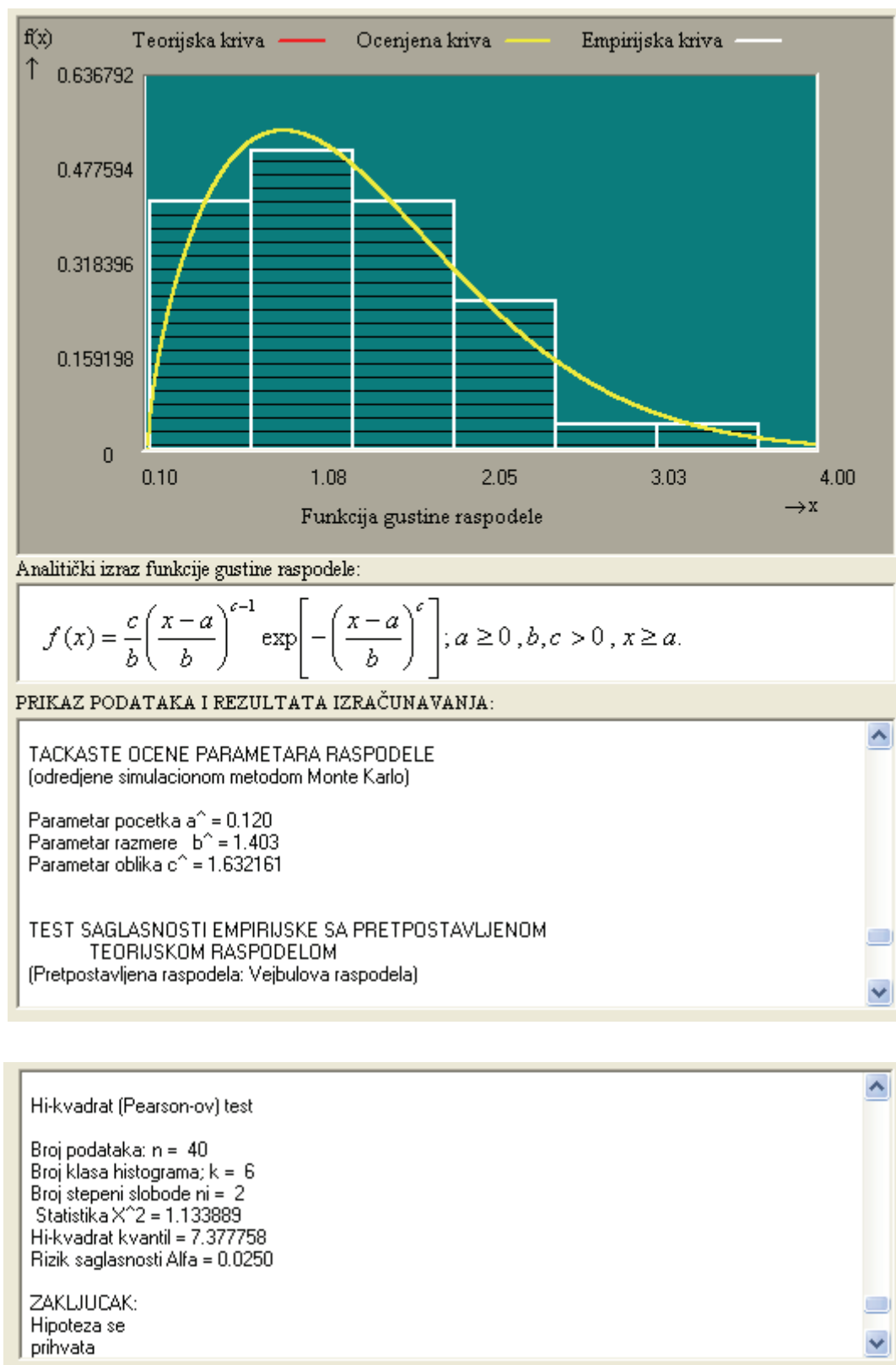
U toku praćenja aktivnosti održavajna i popravki u jednom servisu, dobijeni su sledeći podaci koji se odnose na vremena aktivne popravke izražena u satima (Tabela 1.).

Tabela 1. –Vremena aktivne popravke, T_{apopr} [h]

1. 0.3333	2. 0.1333	3. 0.4167	4. 2.0000	5. 1.7500	6. 1.5833
7. 0.3333	8. 1.0000	9. 0.4167	10. 1.7500	11. 0.4167	12. 1.6667
13. 2.4167	14. 1.1667	15. 119.00	16. 4.0000	17. 1.0000	18. 1.2167
19. 2.5000	20. 1.5833	21. 0.2500	22. 0.6833	23. 1.7500	24. 1.3333
25. 3.6667	26. 1.5000	27. 0.5000	28. 1.9166	29. 1.0833	30. 0.8333
31. 1.0000	32. 2.1667	33. 1.3333	34. 2.0000	35. 1.1667	36. 1.4167
37. 1.0000	38. 0.3333	39. 1.7500	40. 0.7500	41. 2.0000	42. 1.0000

Za određivanje tačkastih ocena parametara a , b i c Vejbulove raspodele, kao i za proveru saglasnosti pretpostavljene teorijske sa empirijskom raspodelom, urađen je računarski program u VISUAL

BASIC-u. Unošenjem ovih podataka i aktiviranjem tog programa dobijeni su rezultati koji se mogu videti na Slici 1.



Slika 1. –Grafik ocenjene funkcije gustine Vejbulove raspodele

Na ovoj slici prikazan je histogram slučajne promenljive x , kao i grafik ocenjene funkcije gustine

Vejbulove raspodele u kojoj figurišu ocenjeni parametri $\hat{a}$, $\hat{b}$ i $\hat{c}$, tj.

$$\hat{f}(x) = \frac{\hat{c}}{\hat{b}} \left(\frac{x - \hat{a}}{\hat{b}} \right)^{\hat{c}-1} \exp \left[- \left(\frac{x - \hat{a}}{\hat{b}} \right)^{\hat{c}} \right]; \hat{a} \geq 0, \hat{b}, \hat{c} > 0, x \geq \hat{a},$$

gde je $\hat{a}$ – ocenjeni parametar položaja ili početka,
 $\hat{b}$ – ocenjeni parametar razmere ili skale i
 $\hat{c}$ – ocenjeni parametar oblika.

Kao što se vidi na Slici 1, grafik ove funkcije dobro se fituje ili uklapa u histogram slučajne promenljive x , što ukazuje na to da se može usvojiti da ova slučajna promenljiva ima Vejbulovu raspodelu sa parametrima: $a \approx \hat{a} = 0.120$, $b \approx \hat{b} = 1.403$ i $c \approx \hat{c} = 1.632161$. Ovo je potvrđeno i primenom hi-kvadrat ili Pearson-ovim testom saglasnosti, gde se vidi da je statistika $X^2 = 1.133889$ i da je kvantil hi-kvadrat raspodele $\chi^2_{\nu; \alpha} = 7.377758$, gde je $\nu = 2$ i $\alpha = 0.025$. Pošto je $X^2 < \chi^2_{\nu; \alpha}$, to se može prihvatiti pretpostavka da slučajna promenljiva x ima Vejbulovu raspodelu sa ocenjenim parametrima $\hat{a}$, $\hat{b}$ i $\hat{c}$. Treba napomenuti da su ovde odbačene i dve vrednosti slučajne promenljive x , kao malo verovatne.

Na osnovu poznatih vrednosti tačkastih ocena $\hat{a}$, $\hat{b}$ i $\hat{c}$ mogu se odrediti i tačkaste ocene za srednju vrednost m i standardnu devijaciju σ pomoću sledećih izraza:

$$\hat{m} = \hat{a} + \hat{b} \cdot \Gamma \left(1 + \frac{1}{\hat{c}} \right).$$

$$\hat{\sigma} = \hat{b} \sqrt{\Gamma \left(1 + \frac{2}{\hat{c}} \right) - \left[\Gamma \left(1 + \frac{1}{\hat{c}} \right) \right]^2}$$

Tako se dobija da je
 $\hat{m} = 1.3756$, što je približno jednako aritmetičkoj sredini $\bar{x} = 1.265417$ i
 $\hat{\sigma} = 0.789025$, što je približno jednako empirijskoj standardnoj devijaciji $s = 0.743753$.

ZAKLJUČAK

Izložena analiza vremena aktivne popravke pokazala je pomoću hi-kvadrat testa saglasnosti da ovo vreme, kao slučajna promenljiva x , ima Vejbulovu raspodelu u intervalu $(0, +\infty)$. Parametri ove raspodele: a , b i c određeni su u ovom radu primenom simulacione metode Monte Karlo, jer je ova metoda mnogo pogodnija za izračunavanje tačkastih ocena $\hat{a}$, $\hat{b}$ i $\hat{c}$, nego neke druge poznate metode, kao što je, na primer, metoda maksimalne verodostojnosti, a pri tom su dobijeni prihvatljivi rezultatai, što pokazuje i dobro fitovanje (uklapanje) ocenjene funkcije gustine raspodele u histogram, kao empirijsku funkciju gustine raspodele.

Pomoću računarskog programa, urađenog specijalno za ovu svrhu, izvršen je veći broj provera valjanosti pretpostavke da vreme aktivne popravke, kao slučajna promenljiva x , ima Vejbulovu raspodelu i kod svih provera ishod je bio potvrđan.

LITERATURA

- [1] P. Chapouille et R. De Pazzis, **Fiabilité des Systèmes**, Masson et Cie, Paris, 1968.
- [2] B. L. Van Der Waerden, **Mathematische Statistik**, Springer-Verlage, Berlin, 1965.
- [3] Marek Fisz, **Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik**, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1962.
- [4] Branislav Ivanović, **Teorijska statistika**, Naučna knjiga, Beograd, 1979.
- [5] D. S. Mitrović i D. Ž. Đoković, **Specijalne funkcije**, Građevinska knjiga, Beograd, 1964.