Ekonomski signali, 2017, 12(2): 053-061

UDK: 005.311.121:519.233.6

TESTOVI RANGA

Marjana Timotijević

Korespodencija: marjana.r.timotijevic92@gmail.com

Vrsta rada: Pregledni rad

Primljen: 08.08.2017; Prihvaćen: 15.12.2017

Rezime: Testovi ranga su najvažniji metodi neparametarske statistike. U uvodnom delu bilo je diskusije o parametarskim i neparametarskim metodama i ustanovljeno je da testovi ranga predstavljaju jedne od najvažnijih neparametarskih metoda. Zatim su u glavnom delu opisani Man Vitnijev U test, Kraskal Volisov test i Frimenov test, koji predstavljaju najpoznatije i najćešće korišćene testove ranga. Objašnjen je postupak testiranja pomoću navedenih testova i kroz primere je pokazana široka primena ovih testova, posebno u medicini, psihologiji, itd.

Ključne reči: metode, testovi, rang, hipoteze, uzorak.

1. Uvod

Na početku ćemo navesti osnovne pojmove statistike koji su neophodni za dalji rad: populacija ili osnovni skup Ω je skup svih pojedinačnih objekata na kojima se izvesna pojava posmatra; elementi ili jedinice populacije ω su pojedinačni slučajevi posmatrane mase; obeležje X je karakteristika svakog elementa koji se posmatra [Stojanović, 2012, 135-136]; uzorak je deo populacije i na njemu posmatramo izvesnu pojavu [Petrović, 2006, 14-15].

Poznato je u ranijim statističkim istraživanjima da mnoge pojave prate najčešće normalnu raspodelu.[1] Za ispitivanje ovih pojava koriste se parametarske metode. Kod ovih metoda podatke koje ispitujemo su kvantitativno merljivi. Primena parametarskih metoda zahteva ispunjenje niza striktnih uslova, jedan od tih uslova je i poznavanje tipa funkcije raspodele [Petrović, 2006, 50-51]. Međutim, mnoge pojave u sferi društvenih nauka nisu kvantitaivno merljivi, podatke koje ispitujemo javljaju se u obliku nominalne ili ordinalne merne skale[2] i ne prate normalnu raspodelu. Za ispitivanje ovih pojava koristimo neparametarske metode.

U strukturi neparametarskih metoda najvažnije mesto zauzimaju neparametarski testovi, a u okviru njih testovi ranga. U daljem radu biće reči o testovima ranga, urađena su istraživanja u okviru primera. Najpre će biti objašnjeni postupci testiranja pomoću testova ranga.

Pokazano je da neparametarski testovi, tj. testovi ranga imaju široku primenu posebno u medicini, biologiji, psihologiji, itd.

2. Testovi ranga

Testovi ranga su najpoznatiji testovi za testiranje podataka koji nisu kvantitativno merljivi. Kod ovih testova podaci se prvo rangiraju pa se analiza fokusira na rangovima. Testiranje se vrši u pet koraka [LaMorte, 2017, 3-4].

Sastavljamo hipoteze, najpre nultu hipotezu H_0, i ona je hipoteza o nepostojanju razlika, zatim sastavljamo alternativnu hipotezu H_1 i ona je suprotna nultoj hipotezi [Petrović, 2006, 30-31].

Kritična vrednost C predstavlja skup tačaka za koje se hipoteza H_0 odbacuje [Popović, 2009, 25-26].

Nivo značajnosti, prag značajnosti, greška prve vrste α predstavlja verovatnoću odbacivanja nulte hipoteze u slučaju da je tačna [Merkle, 2002, 54-55].

Greška druge vrste predstavlja verovatnoću prihvatanja nulte hipoteze u slučaju da nije tačna [Žižić, Lovrić, & Pavličić, 2003, 105-106].

Postupak provere nulte hipoteze naziva se statistika test [Stojanović, 2012, 186-187].

2.1. Man Vitnijev U test

Ukoliko se u nekom istražvanju dobijaju podaci koji znatno odstupaju od normalnog rasporeda ili su dati opisno, ali se mogu rangirati i ukoliko su uzorci mali, za dato istraživanje najbolje je primentiti jedan od najjačih i najjednostavnijih neparametarskih testova - Man Vitnijev U test. Man Vitnijev U test koristimo za testiranje da li dva nezavisna uzorka potiču iz iste populacije [LaMorte, 2017, 4-5].

U prvom primeru za testiranje novog leka koristićemo Man Vitnijev U test. Testiraju se dva nezavisna uzorka.[3]

Primer 1. Razmotrimo kliničko ispitivanje dizajnirano da istraži efikasnost novog leka za smanjenje simptoma astme kod dece. Ukupno $n=10$ učesnika su nasumično primali novi lek ili neki već probani lek. Učesnici su zamoljeni da zabeleže broj epizoda kratkog daha u periodu jedne nedelje nakon primanja terapije. Podaci su prikazani tabelom:

Probani lek	7	5	6	4	12
Novi lek	3	6	4	2	1

Da li postoji razlika u broju epizoda kratkog daha učesnika koji su primili lek i učesnika koji su primili već probani lek?

U ovom primeru, podaci u uzorku ne prate normalnu raspodelu. Osim toga veličina uzorka je mala ($n_1=n_2=5$) tako da je Man Vitnijev U test odgovarajući za ovo ispitivanje. Za ovo testiranje uzimamo nivo značajnosti $\alpha=0.05$.

U prvom koraku postavimo hipoteze. Prag značajnosti smo već izabrali i on iznosi $\alpha=0.05$.

H_0: Broj epizoda kratkog uzdaha učesnika je jednak,

H_1: Broj epizoda kratkog uzdaha učesnika nije jednak.

U drugom koraku odabiramo test statistiku i rangiramo podatke. Rekli smo da je uzorak mali i da ne prati normalnu raspodelu i za opis datih podatka najbolji je Man Vitnijev U test. Najpre formirajmo tabelu sa rangovima.

		Objedinjeni uzorci		Rangovi	
Probani lek	Novi lek	Probani lek	Novi lek	Probani lek	Novi lek
7	3		1		1
5	6		2		2
6	4		3		3
4	2	4	4	4.5	4.5
12	1	5		6	
		6	6	7.5	7.5
		7		9	
		12		10	

U prve dve kolone nalaze se dati podaci, u druge dve kolone nalaze se podaci poređani od najmanjeg do najvećeg i u poslednje dve kolone nalaze se rangovi za odgovarajuće podatke. Kao što vidimo najmanjem podatku 1 dodeljen je najmanji rang 1, sledećem najmanjem podatku 2 dodeljen je rang 2 i tako dalje. Primetimo da se na 4-om i 5-om mestu nalaze jednake vrednosti, ovim podacima dodeljena je sredina brojeva 4 i 5, tj. dodeljen je rang 4.5. Isto tako važi i za 7-mo i 8-mo mesto. I najvećem podatku 12 dodeljen je najveći rang 10. Suma ranga u grupi *probani lek* je $R_1=37$, a u grupi *novi lek* je $R_2=18$ i primetimo da je $R_1+R_2=37+18=55$, tj. da je suma oba ranga uvek jednaka sa:

$$\frac{n(n+1)}{2}=\frac{10(10+1)}{2}=\frac{10\cdot 11}{2}=55$$

U trećem koraku određujemo kritičnu oblast. Na osnovu datih podataka $n_1=5$ i $n_2=5$ i $\alpha=0.05$ odredjujemo iz tablice kritičnu oblast. U ovom slučaju kritična vrednost je 2. Test statistiku kod Man Vinijevog U testa označavamo sa U. Nultu hipotezu odbacujemo ako je $U \leq 2$.

U četvrtom koraku računamo test statistiku. Test statistika Man Vintijevog U testa, rekli smo da se označava sa U, je statistika U_1 ili U_2, u zavisnosti od toga da li je manja vrednost statistike U_1 ili U_2. U_1 i U_2 dati su sledećim formulama:

$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1 \cdot (n_1 + 1)}{2} - R_1$$

$$U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2 \cdot (n_2 + 1)}{2} - R_2$$

gde je R_1 suma rangova za prvu grupu, a R_2 suma rangova za drugu grupu.

Za ovaj primer je,

$$U_1 = 5 \cdot 5 + \frac{5 \cdot 6}{2} - 37 = 3$$

$$U_2 = 5 \cdot 5 + \frac{5 \cdot 6}{2} - 18 = 22$$

U našem primeru $U=3$ (jer je $U_1<U_2$).

I peti korak je zaključak. Kako nultu hipotezu odbacujemo u korist nenulte hipoteze ako je $U \leq 2$, u našem slučaju je $U=3>2$ to ne odbacujemo nultu hipotezu. Dakle, broj epizoda kratkog uzdaha učesnika je jednak.

2.2. Kraskal Volisov test

Popularan neparametarski test za poređenje među više od dva nezavisna uzorka je Kraskal Volisov test. Test se koristi za ispitivanje nulte hipoteze da $k(k>2)$ nezavisnih uzoraka pripadaju istom osnovnom skupu [LaMorte, 2017, 5-6].

U drugom primeru za testiranje anaerobnog praga koristićemo Kraskal Volisov test. Testira se više nezavisnih uzoraka.

Primer 2. Trener je zainteresovan za poređenje anaerobnog praga kod vrhunskih sportista. Anaerobni prag je najveći intezitet rada, između produkcije i eliminacija laktata (soli mlečne kiseline). Sledeći podaci su anaerobni prag za atletičara, biciklistu, plivača i skijaša.

Atletičar	Biciklista	Plivač	Skijaš
185	190	166	201
179	209	159	195
192	182	170	180
165	178	183	187
174	181	160	215

Da li postoji razlika u anaerobnim pragovima različitih grupa sportista?

Rešenje:

Korak 1: Postavimo hipoteze uz nivo značajnosti $\alpha=0.05$:

H_0: Ne postoji razlika u anaerobnim pragovima između grupa sportista;

H_1: Postoji razlika u anaerobnim pragovima između grupa sportista.

Korak 2: Formiramo tabelu sa rangovima. Podatke poređamo od najmanjeg do najvećeg, pa zatim tako raspoređenim podacima dodeljujemo odgovarajući rang.

				Obedinjeni uzorci				Rangovi			
A	B	P	S	A	B	P	S	A	B	P	S
185	190	166	201			159				1	
179	209	159	195			160				2	
192	182	170	180	165				3			
165	178	183	187			166				4	
174	181	160	215			170				5	
				174				6			
					178				7		
				179				8			
							180				9
					181				10		
					182				11		
						183				12	
				185				13			
							187				14
					190				15		
				192				16			
							195				17
							201				18
					209				19		
							215				20

Suma svih rangova će uvek biti jednaka

$$\frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

Proverimo:

$$\frac{n\cdot(n+1)}{2}=\frac{20\cdot(21)}{2}=210,$$

$$R_1+R_2+R_3+R_4=46+62+24+78=210$$

Korak 3: Kritičnu vrednost nalazimo u tablici kritičnih vrednosti za χ^2 raspodelu[4] za

$df=k-1=4-1=3$ i α=0.05.

Kritična vrednost je 7.81 i konačna odluka je odbiti H_0 ako je $H\geq 7.81$.

Korak 4: Računamo test statistiku:

$$H=\left(\frac{12}{n\cdot(n+1)}\sum_{j=1}^{k}\frac{R_j^2}{n_j}\right)-3\cdot(n+1)=$$

$$=\left(\frac{12}{20\cdot 21}\cdot\left(\frac{46^2}{5}+\frac{62^2}{5}+\frac{24^2}{5}+\frac{78^2}{5}\right)\right)-3\cdot 21=9.11$$

Korak 5: Zaključak. Odbacujemo H_0 zbog toga što je 9.11 > 7.81. Dakle, postoji razlika u anaerobnim pragovima između grupa sportista.

2.1. Fridmenov test

Ukoliko posmatramo problem analize više zavisnih uzoraka[5], a podaci se mogu meriti na ordinalnoj mernoj skali, možemo koristiti Fridmenov test radi ispitivanja nulte hipoteze da k uzoraka pripadaju istom osnovnom skupu [Žižić, Lovrić, & Pavličić, 2003, 110-111].

Postupak Fridmenovog testa sastoji se u tome da se rezultati najpre razvrstaju u tablici sa n redova i k kolona. Redovi odgovaraju pojedinim ispitanicima (ili grupama ispitanika), a kolone predstavljaju eksperimentalne ishode [Žižić, Lovrić, & Pavličić, 2003, 110-111].

Primer 3: Osmoro ispitanika ispitivana su u 4 eksperimentalne situacije: ispitivana je količina upamćenog materijala nakon četiri različite duge pauze. Rezultati su dole prikazani (broj u tabeli označava količinu upamćenog materijala).

Ispitanici	A	B	C	D
1	4	5	9	3
2	8	9	14	7
3	7	13	14	6
4	16	12	14	10
5	2	4	7	6
6	1	4	5	3
7	2	6	7	9
8	5	7	8	9

Postoji li statistički značajna razlika između količine upamćenog materijala u te 4 eksperimentalne situacije? Upotrebite Fridmenov test.

Rešenje:

Korak 1. Najpre postavljamo hipoteze uz nivo značajnosti α=0.05:

H_0: Četiri uzoraka potiču iz istog osnovnog skupa;

H_1: Četiri uzoraka ne potiču iz istog osnovnog skupa.

Korak 2. Test statistika je Fridmenov test. Formiramo tabelu rangova:

Ispitanici	Količina upamćenog materijala				
	A	B	C	D	Σ
1	2	3	4	1	
2	2	3	4	1	
3	2	3	4	1	
4	4	2	3	1	
5	1	2	4	3	
6	1	3	4	2	
7	1	2	3	4	
8	1	2	3	4	
Suma rangova R_i	14	20	29	17	
R_i^2	196	400	841	289	1726

Takođe možemo proveriti da li je

$$\sum_{i=1}^{k} R_i = \frac{n \cdot k \cdot (k+1)}{2}:$$

$$14+20+29+17=\frac{8\cdot 4\cdot 5}{2}=80$$

Korak 3. U trećem koraku određujemo pravilo testa i kritičnu oblast. U ovom slučaju koristićemo svojstvo Fridmenove statistike da ima aproksimativno χ^2 raspored sa (k-1) stepena slobode i kritična vrednost se određuje iz tablice χ^2 rasporeda. Za naš primer je $df = k-1 = 4-1 = 3$ i α=0.05, kritična vrednost je 7.815. Test statistiku označavamo sa Q i ako je $Q \leq 7.815$ nultu hipotezu ne odbacujemo.

Korak 4. U četvrtom koraku računamo test statistiku. Test statistika za Fridmenov test se računa po sledećoj formuli:

$$Q=\left[\frac{12}{n\cdot k\cdot (k+1)}\sum_{i=1}^{k} R_i^2\right]-3n(k+1),$$

pa je:

$$Q=\frac{12}{8\cdot 4\cdot (4+1)}\cdot 1726-3\cdot 8\cdot (4+1)=9.45$$

Korak 5. Zaključak. Kako je $Q>7.815$ sa nivoom značajnosti α=0.05 odbacujemo nultu hipotezu i zaključujemo da postoji statistički značajna razlika između količine upamćenog materijala u te 4 eksperimentalne situacije.

3. Zaključak

Uvodni deo rada najpre je posvećen osnovnim statističkim pojmovima. Zatim je bilo diskusije o parametarskim i neparametarskim statističkim metodama. U glavnom delu su opisani testovi ranga, kao bitan metod neparametarske statistike, i dat je detaljan opis Man Vitnijevog U testa, Kaskal Volisovog testa i Fridmenovog testa. Na osnovu urađenih primera možemo videti da ovi testovi imaju široku primenu u mnogim naukama, i zbog toga predstavljaju važan segment savremenih statističkih tehnika.

Reference

Stojanović, V. (2012). V*erovatnoća i statistika,* Beograd, FIM-inžinjerijski menadžment.

LaMorte, W. W. (2017). *Nonparametric Tests,* Boston, Boston University of Public Health.

Petrović, Lj. (2006). *Teorijska statistika,* Beograd, Ekonomski fakultet Univerziteta u Beogradu

Popović, B. (2009). *Matematička statistika,* Niš, Prirodno-matematički fakultet u Nišu.

Merkle, M. (2002). *Verovatnoća i statistika,* Beograd, Akademska misao.

Žižić, M., Lovrić, M., & Pavličić, D. (2003). *Metodi statističke analize,* Beograd, CID

Rank tests

Marjana Timotijević
marjana.r.timotijevic92@gmail.com

Abstract: Rank tests are the most important methods of nonparametric statistics. In the introductory part, there are discussions of parametric and nonparametric metods and as a result of those discussions it is established that the rank tests are one of the most important methods of nonparametric methods. Then in the main part are described: the Mann Whitey U test, Kruskal Wallis and Freadman tests. Therefore, the procedure of the theatrical examination with the above tests are explained. Through the examples, a wide application of these tests has been demonstrated, especially in medicine, psychology, etc.

Key words: methods, tests, rank, hypothesis, sample.

---

[1] Funkcija raspodele verovatnoća *F(X)* potpuno karakteriše obeležje populacije. Određivanje vrednosti obeležja *X* svodi se na određivanje njene funkcije raspodele. Normalna raspodela predstavljena je funkcijom:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, x\in R,$$

gde su $\mu\in R$ i $\sigma>0$ zadati parametri [Stojanović, 2012].

[2] Nominalna merna skala nije kvantitativna mera, već samo predstavlja skup oznaka koje se dodeljuju objektima [Žižić, Lovrić, & Pavličić, 2003]. Ordinalna

merna skala je kategorička promenljiva sa definisanom relacijom poretka. Jedinica mere nije definisana [Žižić, Lovrić, & Pavličić, 2003].

[3] Ukoliko izbori uzoraka iz populacija ne utiču jedan na drugi, tada za uzorke kažemo da su nezavisni.

[4] Postupak nazvan hi-kvadrat test se upotrebljava u većini slučajeva ako se radi o kvalitativnim podacima ili ako tim podacima raspodela značajno odstupa od normalne. Broj stepena slobode *df* definisan je kao broj nezavisnih obeležja u računanju χ^2 testa. Za svaki broj stepena slobode postoji odredjen χ^2 raspored i kritične oblasti prihvatanja ili odbacivanja nulte hipoteze.

[5] Ukoliko izbori uzoraka iz populacija utiču jedan na drugi tada za uzorke kažemo da su zavisni.