Зборник радова Учитељског факултета, 11, 2017, стр. 59-68
515.126.4
COBISS.SR-ID 247607052

Љиљана Пауновић[8]
Универзитет у Приштини – Косовској Митровици
Учитељски факултет у Призрену – Лепосавићу

ТЕОРЕМЕ О ФИКСНОЈ ТАЧКИ У КОНУСНОМ МЕТРИЧКОМ ПРОСТОРУ ПРИМЕНОМ c – ДИСТАНЦЕ

Сажетак: *У овом раду постигнути су резултати који се односе на одређивање фиксне тачке применом c-дистанце. Доказано је постојање фиксне тачке у конусном метричком простору када је пресликавање непрекидно. Доказано је и постојање фиксне тачке у комплетном конусном метричком простору када је конус нормалан али када пресликавање није непрекидно за различите врсте контрактивних пресликавања.*

Кључне речи: *конусни метрички простор, c-дистанца, ω - дистанца.*

УВОД

Француски математичар Морис Фреше (Maurice Frechet) 1906. године први пут уводи концепт метричких простора, али не под тим именом. Термин метрички простор касније уводи немачки математичар Феликс Хаусдорф (Felix Hausdorff) који се сматра једним од оснивача топологије. Касније, 2007. године уведен је појам конусних метричких простора, међутим они су већ постојали под именом К-метрички и К-нормирани простори. У оба случаја скуп R реалних бројева замењен је уређеним Банаховим (Banach) простором E. Многи аутори су проучавали проблем одређивања фиксне тачке у конусним метричким просторима (Kadelburg-Radenović 2012; Janković et al. 2011; Kadelburg et al. 2010; Abbas-Rhoades 2009; Azam-Arshad 2009; Jungck et al. 2009; Ilić-Rakočević 2009; Wardowski 2009; Ilić-Rakočević 2008; Abbas-Jungck 2008).

У (Kada et al. 1996) дефинише се по први пут појам ω-дистанце у комплетном метричком простору и доказује неколико

[8] ljiljana.paunovic76@gmail.com

теорема о фиксној тачки у овом простору. У (Wang-Guo 2011) дефинисан је концепт c-дистанце у конусном метричком простору. Такође, у (Cho et al., 2011) уведен је нови концепт c-дистанце у конусним метричким просторима и доказано је неколико теорема о фиксној тачки у уређеним конусним метричким просторима. У (Đorđević et al. 2011) доказане су теореме о фиксној тачки и заједничкој фиксној тачки применом c-дистанце за контрактивна пресликавања у tvs-конусном метричком простору. У (Fadail et al. 2012a) доказане су неке теореме о фиксној тачки применом c-дистанце у конусном метричком простору за пресликавања која нису непрекидна.

У (Hung-Zhang 2007) се по први пут уводи појам конуса.

Дефиниција 1. (Hung-Zhang 2007) Нека је E реалан Банахов простор. Подскуп P од E назива се *конус* ако је:

(1) P је затворен, непразан и $P \neq \{\theta\}$;

(2) $a, b \in R$, $a, b \geq 0$, и $x, y \in P$ следи да је $ax + by \in P$;

(3) $P \cap (-P) = \{\theta\}$.

Ако је дат конус $P \subset E$, парцијално уређење $\leq$ у односу на P је дефинисано са $x \leq y$ ако и само ако је $y - x \in P$. Користићемо ознаку $<$ уместо $x \leq y$ али $x \neq y$ док $x << y$ означава да је $y - x \in \operatorname{int} P$ (интериор за P).

У (Deimling 1985) се дефинише појам нормалан, семи-монотон и монотон конус.

Дефиниција 2. (Deimling 1985) Конус P у Банаховом простору E је:

(1) *нормалан* ако је

$$\inf\{\|x + y\| : x, y \in P, \|x\| = \|y\| = 1\} > 0;$$

(2) *семи-монотон* ако постоји $M > 0$ тако да за све $x, y \in E$ важи:

$$\theta \leq x \leq y \text{ следи } \|x\| \leq M\|y\|;$$

(3) *монотон* ако за све $x, y \in E$ важи:

$$\theta \leq x \leq y \quad \text{следи} \quad \|x\| \leq \|y\|,$$

тј. семи-монотон за $M = 1$.

У (Kada et al. 1996) дефинише се по први пут појам ω- дистанце у комплетном метричком простору и доказује неколико теорема о фиксној тачки у овом простору.

Дефиниција 3. (Kada et al. 1996) Нека је X метрички простор са метриком d. Функцију $p: X \times X \to [0, \infty)$ називамо ω- дистанца на X ако

(1) $p(x,z) \leq p(x,y) + p(y,z)$ за свако $x, y, z \in X$;

(2) Ако је $x \in X$ и $y_n \to y$ у X онда $p(x,y) \leq \liminf_n p(x, y_n)$;

(3) За неко $\varepsilon > 0$, постоји $\delta > 0$ тако да $p(z,x) \leq \delta$ и $p(z,y) \leq \delta$ имплицира $d(x,y) \leq \varepsilon$.

Пример 1: Нека је $X = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in N \right\} \cup \{0\}$. За свако $x, y \in X$, $d(x,y) = x + y$ ако је $x \neq y$ и $d(x,y) = 0$ ако је $x = y$ је метрика на X и (X,d) је комплетан метрички простор. Ако дефинишемо p са $p(x,y) = y$, p је ω-дистанца на (X,d).

У (Wang-Guo 2011) дефинисан је концепт c-дистанце у конусном метричком простору. Такође, у (Cho et al., 2011) уведен је нови концепт c-дистанце у конусним метричким просторима и доказано је неколико теорема о фиксној тачки у уређеним конусним метричким просторима.

Дефиниција 4. (Wang-Guo 2011; Cho et al. 2011) Нека је (X,d) конусни метрички простор. Онда се функција $q: X \times X \to E$ назива c- дистанца на X ако задовољава следеће:

(1) $\theta \leq q(x,y)$ за све $x, y \in X$;

(2) $q(x,z) \leq q(x,y) + q(y,z)$ за све $x, y, z \in X$;

(3) за све $x \in X$, ако је $q(x, y_n) \leq U$ за неко $U \in P$, онда $q(x,y) \leq U$ када је $\{y_n\}$ низ у X који конвергира ка $y \in X$.

(4) за све $c \in E$ са $\theta << c$, егзистира $e \in E$ са $\theta << e$ тако да $q(z,x) << e$ и $q(z,y) << e$ односно $d(x,y) << c$.

Напомена 1: Ако је $E = R$ и $P = R^+$ онда је (X,d) прост метрички простор.

(1) ако услов (3) заменимо следећим условом

(3') $x \in X$ где $q(x,\cdot) \to R^+$ је опадајућа семи-непрекидна, онда c-дистанца q је ω-дистанца на X.

(2) лако је видети да ако је $q(x,\cdot)$ опадајућа семи-непрекидна, онда је (3) одрживо. Одатле је јасно да свака ω-дистанца је c-дистанца али обрнуто не важи. Значи, c-дистанца је уопштење за ω-дистанцу.

Пример 2: Нека је (X,d) конусни метрички простор и P нормалан конус. Ставимо да је $q(x,y) = d(x,y)$ за све $x, y \in X$. Онда је q c-дистанца. Нека је $c \in E$ и $\theta << c$ и нека је $e = \dfrac{c}{2}$. Претпоставимо да је $q(z,x) << e$ и $q(z,y) << e$.

Онда $\mathrm{d}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{q}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \le \mathrm{q}(\mathrm{x},\mathrm{z}) + \mathrm{q}(\mathrm{z},\mathrm{y}) << \mathrm{e} + \mathrm{e} = \mathrm{c}$. Ово показује да q задовољава услов (4) из Дефиниције 4, отуда q је c-дистанца.

РЕЗУЛТАТИ

Да бисмо доказали неколико теорема које следе потребно је дефинисати следећу лему (видети (Cho et al. 2011; Пауновић 2017:26)).

Лема 1. (Cho et al. 2011) Нека је (X,d) конусни метрички простор и q c-дистанца на X. Нека је $\{x_n\}$ низ у X. Претпоставимо да је $\{U_n\}$ низ у P конвергентан ка θ. Ако је $q(x_n, x_m) \le U_m$ за $n > m$, онда је $\{x_n\}$ Кошијев (Cauchy) низ у X.

Теорема 1. (Wang et al. 2009) Нека је (X,d) конусни метрички простор и P конус. Нека је $f : X \to X$ непрекидно пресликавање које задовољава услове контракције

$$q(fx, fy) \le kq(x,y), \text{ за све } x, y \in X \qquad (1)$$

где је $k \in [0,1)$ константа. Онда за неко $x \in X$, итеративни низ $\{f^n x\}$ конвергира фиксној тачки функције f.

Доказ: Изаберимо $x_0 \in X$. Ставимо да је $x_n = f^n x_0$, $n \ge 1$. Помоћу (1) имамо

$$q(x_{n+1}, x_n) = q(fx_n, fx_{n-1}) \le kq(x_n, x_{n-1})$$
$$\le k^2 q(x_{n-1}, x_{n-2}) \le \ldots \le k^n q(x_1, x_0)$$

Такође, за $n > m$

$$q(x_n, x_m) \le q(x_n, x_{n-1}) + q(x_{n-1}, x_{n-2}) + \ldots + q(x_{m-1}, x_m)$$
$$\le \left(k^{n-1} + k^{n-2} + \ldots + k^m\right) q(x_1, x_0)$$
$$\le \frac{k^m}{1-k} q(x_1, x_0).$$

Лако је видети да $\left\{\frac{k^m}{1-k} q(x_1, x_0)\right\}$ конвергира ка θ. Такође, помоћу претходне Леме можемо закључити да је $\{x_n\}$ Кошијев низ. Како је X комплетан, то значи да постоји тачка $x^* \in X$ тако да низ $\{x_n\}$ конвергира ка x^*. Непрекидност функције f подразумева да је $x^* = fx^*$.

Ако f није непрекидна имамо следеће резултате (Wang et al. 2009; Пауновић 2017:27).

Теорема 2. (Wang et al. 2009) Нека је (X, d) комплетан конусни метрички простор и P нормалан конус са нормалном константом M. Нека је $f : X \to X$ пресликавање које задовољава услове контракције

$$q(fx, fy) \le kq(x, y), \text{ за све } x, y \in X \tag{2}$$

где је $k \in [0,1)$ константа. Ако следећи услови важе

$$\inf\{\|q(x, y)\| + \|q(fx, x)\| : x \in X\} > 0$$

за неко $y \in X$ са $y \ne fy$, онда f има фиксну тачку у X.

Доказ: : Изаберимо $x_0 \in X$. Ставимо да је $x_n = f^n x_0$, $n \ge 1$. Из доказа претходне теореме закључујемо да низ $\{x_n\}$ конвергира ка тачки $x^* \in X$. Осим тога

$$q(x_{n+1}, x_n) \le k^n q(x_1, x_0), \tag{3}$$

за све $n \ge 1$ и $q(x_n, x_m) \le \frac{k^m}{1-k} q(x_1, x_0)$ за све $n > m$. Сада је

$$q(x_{m+1}, x_m) \leq \frac{k^m}{1-k} q(x_1, x_0). \tag{4}$$

Како $\{x_n\}$ конвергира ка x^* из (3) и услова (4) из Дефиниције 4 следи да је

$$q(x_{n+1}, x^*) \leq k^n q(x_1, x_0), \tag{5}$$

за све $n \geq 1$. Како је P нормалан конус са константом M, из (4) и (5) имамо

$$\|q(x_{m+1}, x_m)\| \leq \frac{Mk^m}{1-k} \|q(x_1, x_0)\|, \tag{6}$$

и
$$\|q(x_{n+1}, x^*)\| \leq Mk^* \|q(x_1, x_0)\|. \tag{7}$$

Ако је $x^* \neq fx^*$, помоћу (6) и (7) и претпоставке имамо

$$\begin{aligned}
0 &< \inf\{\|q(x, x^*)\| + \|q(fx, x)\| : x \in X\} \\
&\leq \inf\{\|q(x_m, x^*)\| + \|q(fx_m, x_m)\| : m \geq 1\} \\
&= \inf\{\|q(x_m, x^*)\| + \|q(x_{m+1}, x_m)\| : m \geq 1\} \\
&\leq \inf\left\{Mk^m \|q(x_1, x_0)\| + \frac{Mk^m}{1-k} \|q(x_1, x_0)\| : m \geq 1\right\} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ово је контрадикторно, одатле закључујемо да је $x^* = fx^*$.

Теореме које наводимо без доказа могу се видети у (Wang et al. 2009; Пауновић 2017:27).

Теорема 3: Нека је (X, d) конусни метрички простор и P конус. Нека је $f : X \to X$ непрекидно пресликавање које задовољава услове контракције

$$q(fx, fy) \leq k[q(x, y) + q(fx, x) + q(fy, y)], \text{ за све } x, y \in X \tag{8}$$

где је $k \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$ константа. Онда за неко $x \in X$, итеративни низ $\{f^n x\}$ конвергира фиксној тачки функције f.

Теорема 4: Нека је (X,d) комплетан конусни метрички простор и P нормалан конус са нормалном константом M. Нека је пресликавање које задовољава услове контракције

$$q(fx,fy)\le k[q(x,y)+q(fx,x)+q(fy,y)], \text{ за све } x,y\in X \qquad (9)$$

где је $k\in\left[0,\frac{1}{3}\right)$ константа. Ако следећи услови важе

$$\inf\{\|q(x,y)\|+\|q(fx,x)\|: x\in X\}>0$$

за неко $y\in X$ са $y\ne fy$, онда f има фиксну тачку у X.

У (Fadail et al. 2012b) постигнут је врло битан резултат када је у питању одређивање фиксне тачке у конусном метричком простору применом *c*-дистанце. Овај резултат представља проширење већ познатих резултата, у овом раду је примењен нови приступ тј. константе у контрактивном услову су замењене функцијом. Може се и видети да је k у свим претходно наведеним теоремама константа, у теореми која следи k је функција.

Теорема 5. (Fadail et al. 2012b) Нека је (X,d) комплетан конусни метрички простор и q је *c*-дистанца на X. Нека је $f:X\to X$ и претпоставимо да постоји пресликавање $k:X\to[0,1)$ тако да је:

1) $k(fx)\le k(x)$ за свако $x\in X$;
2) $q(fx,fy)\le k(x)q(x,y)$ за свако $x,y\in X$;

Онда f има фиксну тачку $x^*\in X$ за било које $x\in X$, итеративни низ $\{f^n x\}$ конвергира фиксној тачки.

Доказ: Изаберимо $x_0\in X$, узмимо да је $x_1=fx_0, x_2=fx_1=f^2x_0\ldots$ онда имамо:

$$\begin{aligned}
q(x_n,x_{n+1}) &= q(fx_{n-1},fx_n)\\
&\le k(x_{n-1})q(x_{n-1},x_n)\\
&= k(fx_{n-2})q(x_{n-1},x_n)\\
&\le k(x_{n-2})q(x_{n-1},x_n)\\
&\ldots\\
&\le k(x_0)q(x_{n-1},x_n)\\
&\le k^2(x_0)q(x_{n-2},x_{n-1})\\
&\le \ldots\\
&\le (k(x_0))^n q(x_0,x_1)
\end{aligned}$$

За $m > n \geq 1$ следи

$$\begin{aligned} q(x_n, x_m) &\leq q(x_n, x_{n+1}) + q(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + q(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq \left((k(x_0))^n + (k(x_0))^{n+1} + \ldots + (k(x_0))^{m-1}\right) q(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{(k(x_0))^n}{1 - k(x_0)} q(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Како је X комплетан то значи да постоји $x^* \in X$ тако да $x_n \to x^*$. На основу услова (3) из Дефиниције 4 имамо

$$q(x_n, x^*) \leq \frac{(k(x_0))^n}{1 - k(x_0)} q(x_0, x_1).$$

Са друге стране имамо да је

$$\begin{aligned} q(x_n, fx^*) &= q(fx_{n-1}, fx^*) \\ &\leq k(x_{n-1}) q(x_{n-1}, x^*) \\ &= k(fx_{n-2}) q(x_{n-1}, x^*) \\ &\leq k(x_{n-2}) q(x_{n-1}, x^*) \\ &\ldots \\ &\leq k(x_0) q(x_{n-1}, x^*) \\ &\leq k(x_0) \frac{(k(x_0))^{n-1}}{1 - k(x_0)} q(x_0, x_1) \\ &= \frac{(k(x_0))^n}{1 - k(x_0)} q(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Из свега претходно наведеног и применом Леме 1 имамо да је $x^* = fx^*$. Дакле x^* је фиксна тачка пресликавања f.

ЗАКЉУЧАК

Постоје примери у којима се јасно види да фиксна тачка постоји, међутим, многи познати резултати и методе одређивања фиксне тачке се не могу применити на такве примере ако f не задовољава контрактивни услов $d(fx, fy) \leq kd(x, y)$ за све $x, y \in X$.

У таквим случајевима се фиксна тачка може одредити само применом *c*-дистанце.

ЛИТЕРАТУРА

Abbas, M., Jungck, G. Common fixed point results for noncommuting mappings without continuity in Cone Metric Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 341/1 (2008):416-420.

Abbas, M., Rhoades, B. E. Fixed and periodic point results in Cone Metric Spaces. *Applied Mathematics Letters*, 22/4 (2009): 511–515.

Azam, A., Arshad, M. Common fixed points of generalized contractive maps in Cone Metric Spaces. *Iranian Mathematical Society. Bulletin*, 35/2 (2009): 255–264.

Cho, Y. J., Saadati, R., Wang, S. Common fixed point theorems on generalized distance in ordered Cone Metric Spaces. *Computers & Mathematics with Applications*, 61/4 (2011):1254–1260.

Đorđević, M., Đorić, D., Kadelburg, Z., Radenović, S., Spasić, D. Fixed point results under *c*-distance in tvs-Cone Metric Spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, 2011/29 (2011).

Fadail, Z. M., Ahmad, A. G. B., Golubović, Z. Fixed Point Theorems of single-valued mapping for *c*-distance in Cone Metric Spaces. *Abstract and Applied Analysis*, vol. 2012, Article ID 826815 (2012), 11 pages.

Fadail, Z. M., Ahmad, A. G. B., Paunović, Lj. New fixed point results of single-valued mapping for c-distance in cone metric spaces. *Abstract and Applied Analysis*, vol. 2012, Article ID 639713 (2012), 12 pages.

Huang, L.G., Zhang, X. Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings. *J. Math. Anal. Appl.* 332, 2 (2007), 1468-1476.

Ilić, D., Rakočević, V. Common fixed point for maps on cone metric space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 341/1 (2008): 876–882.

Ilić, D., Rakočević, V. Quasi-contraction on a cone metric space. *Applied Mathematics Letters*, 22/5 (2009): 728–731.

Jungck, G., Radenović, S., Radojević , S., Rakočević, V. Common fixed point theorems for weakly compatible pairs on Cone Metric Spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, vol. 2009, Article ID 643840 (2009), 13 pages.

Janković, S., Kadelburg, Z., Radenović, S. On Cone Metric Spaces: a survey. *Nonlinear Analysis*, 74/7 (2011): 2591–2601.

Kada, O., Suzuki, T., Takahashi, W., Nonconvex minimization theorems and fixed point theorems in complete metric spaces, *Mathematica Japonica* 44 (1996): 381-391.

Kadelburg, Z., Radenović, S., Rakočević, V. Topological vector space-valued Cone Metric Spaces and fixed point theorems. *Fixed Point Theory and Applications*, vol. 2010, Article ID 170253 (2010), 17 pages.

Kadelburg, Z., Radenović, S. Coupled fixed point results under tvs-Cone Metric Spaces and w-cone-distance. *Advances Fixed Point Theory*, 2/1 (2012): 29-46.

Пауновић, Љ. Теорија апстрактних метричких простора - Неки нови резултати- Лепосавић, Учитељски факултет, 2017.

Wardowski, D. Endpoints and fixed points of set-valued contractions in Cone Metric Spaces. *Nonlinear Analysis*, 71/1 (2009): 512–516.

Wang, C., Zhu, J., Damjanović, B., Hu, L. Approximating fixed points of a pair of contractive type mappings in generalized convex metric spaces. *Appl.Math.Comput.,* 215(2009):1522-1525.

Wang, S., Guo, B. Distance in Cone Metric Spaces and common fixed point theorems. *Applied Mathematics Letters*, 24/10 (2011): 1735–1739.

FIXED POINT THEOREMS IN A CONE METRIC SPACE WITH THE USE OF C-DISTANCE

Abstract: Abstract: *In this paper we achieved the results related to determining the fixed point using c-distance. The existence of a fixed point in a cone metric space is proved when the mapping is continuous. The existence of a fixed point in a complete cone metric space is proved when the cone is normal but when the mapping is not continuous for different types of contractive mapping.*

Key words*: cone metric spaces, c-distance,* ω *-distance.*