

Доц. др Милена БОГДАНОВИЋ
Учитељски факултет у Врању
Универзитет у Нишу

УДК 519.677:004.832
-оригинални научни рад-

Др Лазар СТОШИЋ
Висока школа струковних студија за васпитаче
Алексинач

УПОРЕДНА АНАЛИЗА ТОКА РЕАЛНЕ ФУНКЦИЈЕ РЕАЛНЕ ПРОМЕНЉИВЕ БЕЗ И СА ПРОГРАМСКОМ ПОДРШКОМ

Сажетак: Функција је један од основних појмова у математици. Јавља се у разним областима математике, што зависи од тога шта представљају домен и кодомен. У математичкој анализи, али и у другим областима, најчешће се користи функција реалне променљиве. Под функцијом реалне променљиве подразумевамо функцију $f: X \rightarrow Y$, где је $X \subseteq \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}$. У раду је представљен упоредни приказ анализе и испитивања тока функција облика $y = f(x)$ и цртање графика уз помоћ програма MS Excel-а, као и анализе тока реалне функције без коришћења софтвера. За примере су узете неколике реалне функције и испитан је њихов ток. Резултати су урађени израчунавањем без програмске подршке и уз помоћ програма Microsoft Excel и Power Toy Calculator за цртање графика функције. Приказ добијених резултата показује могућа одступања у самим резултатима.

Кључне речи: функција реалне променљиве, испитивање функције $y = f(x)$, Microsoft Excel, Power Toy Calculator.

Увод

Реална функција једне реалне променљиве или, како се још каже, функција из \mathbb{R} у \mathbb{R} најчешће се задаје формулом облика $y = f(x)$. Сама формула, или боље речено израз $f(x)$ показује нам какве операције треба обавити над вредношћу аргумента x да би се добила одговарајућа вредност функције. При томе, ако област дефинисаности D није дата, подразумева се да је то најшири скуп реалних бројева, за који дата формула има смисла. Над функцијама можемо вршити аритметичке операције (збир, разлика, производ и количник), као и одређивање сложене функције коришћењем композиције функција. Испитивањем особина функције, тј. одређивањем области дефинисаности, тачака прекида, нула функције, знака функције, парности функције, монотоности, екстремних вредности функције можемо, на основу добијених резултата, више или мање прецизно, скицирати график испитиване функције. Сваким испитивањем једне функције облика $y = f(x)$ може доћи до

грешке и одступања у резултатима добијених без и са програмском подршком. Насупрот томе, испитивањем сложене функције, налажење нула функције и њен извод постаје већи проблем. Да би се утврдила тачност добијеног резултата, исти се може проверити у програму *MS Excel* на једноставан и брз начин. Могу се проверити резултати добијени испитивањем тока сложених функција, као и цртати графици истих.

Коришћење програма MS Excel

Програм *MS Excel* омогућава да се помоћу формула и функција обављају разне математичке операције између појединих величина које су смештене у ћелијама радног листа. Такође, *MS Excel* нуди широке могућности графичке презентације података. Математичке функције у *MS Excelu* се могу користити за израчунавање, самостално или у комбинацији са другим функцијама, за прављење сложених формула. Од функција у *MS Excelu* се највише користе статистичке функције. Помоћу њих се може израчунати просек групе бројева, одредити вероватноћа, средња вредност, расподела...

Пример 1.

$$y = \frac{x^2 - 5x + 2}{x + 1}$$

а) Област дефинисаности

Функција је дефинисана за $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Приказ прорачуна у програму Microsoft Excel.

Δx	x	y
10	-100	-106.08
10	-90	-96.09
10	-80	-86.10
10	-70	-76.12
10	-60	-66.14
10	-50	-56.16
10	-40	-46.21
10	-30	-36.28
10	-20	-26.42
10	-10	-16.89
10	0	2.00
10	10	4.73
10	20	14.38
10	30	24.26
10	40	34.20

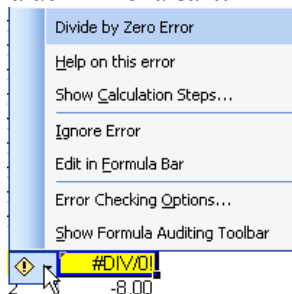
Постављањем веће вредности Δx за анализу ширег интервала променљиве.

Δx	x	y
1	-10	-16.89
1	-9	-16.00
1	-8	-15.14
1	-7	-14.33
1	-6	-13.60
1	-5	-13.00
1	-4	-12.67
1	-3	-13.00
1	-2	-16.00
1	-1	
1	0	2.00
1	1	-1.00

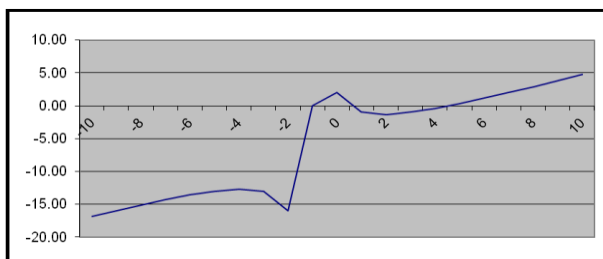
10	50	44.16
10	60	54.13
10	70	64.11
10	80	74.10
10	90	84.09
10	100	94.08

1	2	-1.33
1	3	-1.00
1	4	-0.40
1	5	0.33
1	6	1.14
1	7	2.00
1	8	2.89
1	9	3.80
1	10	4.73

Вертикална асимптота за $x = -1$.



Софтвер указује на дељење са нулом.
Изоставити приказивање овог поља (пребрисати).



Добијени графикон – Microsoft Excel

Нуле функције, тачке прекида

Тачка прекида је $x = -1$, тј. у тој тачки функција није дефинисана.

$$y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 8}}{2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{5 + \sqrt{17}}{2},$$

$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{17}}{2}$$

$$x_1 = 4.5615, x_2 = 0.4385$$

Δx	x	y		
1	-10	-16.89		
1	-9	-16.00		
1	-8	-15.14		
1	-7	-14.33		
1	-6	-13.60		
1	-5	-13.00		
1	-4	-12.67		
1	-3	-13.00		
1	-2	-16.00		
1	-1		изостављено	
1	0	2.00	< 0	
1	1	-1.00	> 0	x_1 , нула функције за $x \in (0,1)$
1	2	-1.33		
1	3	-1.00		
1	4	-0.40	< 0	x_2 , нула функције за $x \in (4,5)$
1	5	0.33	> 0	
1	6	1.14		
1	7	2.00		
1	8	2.89		
1	9	3.80		
1	10	4.73		

1) Проналажење нуле $x_1 \in (-1,0)$

Δx	x	y	
0.5	0.0	2.00	< 0
0.5	0.5	-0.17	> 0
0.5	1.0	-1.00	

$x_1 \in (0.0; 0.5)$

2) Вредност $\Delta x = 0.1$

Δx	x	y	
0.1	0.2	0.87	
0.1	0.3	0.45	
0.1	0.4	0.11	< 0
0.1	0.5	-0.17	> 0

$x_1 \in (0.4; 0.5)$

3) Вредност $\Delta x = 0.001$

Δx	x	y	
0.001	0.430	0.02441	
0.001	0.431	0.02150	
0.001	0.432	0.01859	
0.001	0.433	0.01569	
0.001	0.434	0.01280	
0.001	0.435	0.00991	
0.001	0.436	0.00703	
0.001	0.437	0.00415	
0.001	0.438	0.00128	< 0
0.001	0.439	-0.00158	> 0
0.001	0.440	-0.00444	
0.001	0.441	-0.00730	

$x_1 \in (0.438; 0.439)$ - Тачност: 3 децимална места

4) Вредност $\Delta x = 0.0001$

Δx	x	y	
0.0001	0.4380	0.001282	
0.0001	0.4381	0.000995	
0.0001	0.4382	0.000709	
0.0001	0.4383	0.000422	
0.0001	0.4384	0.000135	< 0
0.0001	0.4385	-0.000151	> 0
0.0001	0.4386	-0.000438	
0.0001	0.4387	-0.000724	
0.0001	0.4388	-0.001011	
0.0001	0.4389	-0.001297	
0.0001	0.4390	-0.001584	

$x_1 \in (0.4384; 0.4385)$ - Тачност: 4 децимална места y приближно 0

1) Проналажење нуле $x_2 \in (4, 5)$

Δx	x	y	
0.5	4.0	-0.40	
0.5	4.5	-0.05	< 0
0.5	5.0	0.33	> 0

$$x_2 \in (4.5; 5.0)$$

2) Вредност $\Delta x = 0.1$

Δx	x	y	
0.1	4.5	-0.05	< 0
0.1	4.6	0.03	> 0
0.1	4.7	0.10	
0.1	4.8	0.18	
0.1	4.9	0.26	
0.1	5.0	0.33	

$$x_2 \in (4.5; 4.6)$$

3) Вредност $\Delta x = 0.01$

Δx	x	y	
0.01	4.50	-0.0455	
0.01	4.51	-0.0381	
0.01	4.52	-0.0307	
0.01	4.53	-0.0233	
0.01	4.54	-0.0160	
0.01	4.55	-0.0086	
0.01	4.56	-0.0012	< 0
0.01	4.57	0.0063	> 0

$x_2 \in (4.56; 4.57)$, мања грешка ако се усвоји, $x_2 = 4.53$ - Тачност: 2 децимална места

4) Вредност $\Delta x = 0.001$

Δx	x	y	
0.001	4.560	-0.00115	
0.001	4.561	-0.00041	< 0
0.001	4.562	0.00033	> 0
0.001	4.563	0.00107	

$x_2 \in (4.561; 4.562)$, мања грешка ако се усвоји $x_2 = 4.562$ - Тачност: 3 децимална места

Дакле, нуле функције, тј. тачке у којима график функције сече x -осу су $A(x_1, y(x_1)) = A(4.5615, 0)$ и $B(x_2, y(x_2)) = B(0.4385, 0)$. Тачка у којој график функције сече y -осу је $C(0, y(0)) = C(0, 2)$.

б) Знак функције

$y > 0$ за $x \in (-1, 0.4385) \cup (4.5615, +\infty)$ тј. график је изнад x -осе;

$y < 0$ за $x \in (-\infty, -1) \cup (0.4385, 4.5615)$ тј. график је испод x -осе.

в) Парност, непарност функције

Функција је парна ако важи $f(x) = f(-x)$, а непарна ако важи $-f(x) = f(-x)$. Ова функција није ни парна ни непарна.

г) Монотоност функције, екстремне вредности

$$y' = \left(\frac{x^2 - 5x + 2}{x + 1} \right)' = \frac{(2x - 5) \cdot (x + 1) - x^2 + 5x - 2}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 7}{(x + 1)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 7 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4 + 28}}{2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{4 + \sqrt{32}}{2},$$

$$x_2 = \frac{4 - \sqrt{32}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 2 + 2\sqrt{2}, x_2 = 2 - 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x_1 = 4.8284, x_2 = -0.8284$$

Тачке $D(x_1, y(x_1))$ и $E(x_2, y(x_2))$ су могуће екстремне вредности функције, тј. могући максимум или минимум. Знак првог извода функције се мења у околини тачке $x_1 = 4.8284$ са $-$ на $+$, па функција у

тој тачки има минимум (функција опада па расте), док у околини тачке $x_2 = -0.8284$ знак првог извода прелази из + на -, па функција у овој тачки има максимум (функција расте па опада).

Дакле, максимум функције је тачка $E(x_2, y(x_2)) = E(-0.8284, 39.7914)$, док је минимум функције у тачки $D(x_1, y(x_1)) = D(4.8284, 0.2010)$.

е) Асимптоте функције

1. Вертикална асимптота је права $x = -1$, јер је $\lim_{x \rightarrow -1} y = \infty$.
2. Како је $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, то функција нема хоризонталну асимптоту.
3. Права $y = kx + n$ ће бити коса асимптота за коју је $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$. У нашем случају је $k = 1, n = -5$, па је права $y = x - 5$ коса асимптота дате функције.

ф) График функције

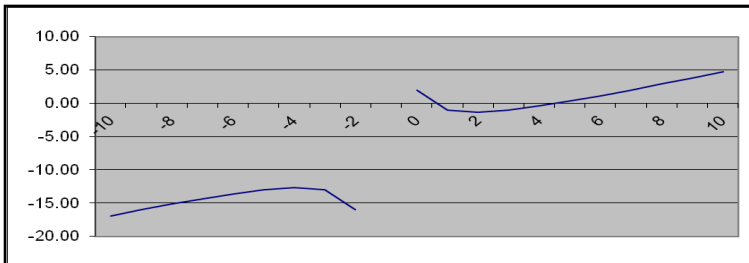


График функције у MS Excel-у

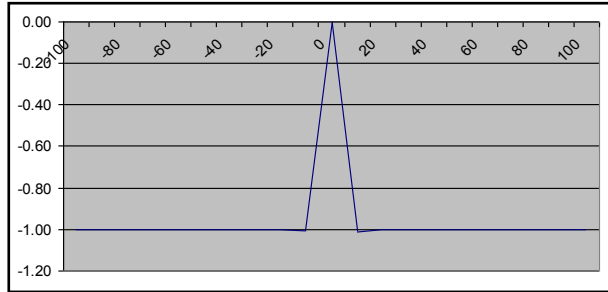
Пример 2. $y = \frac{x^3+x}{1-x^3}$

а) Област дефинисаности

Функција је дефинисана за $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

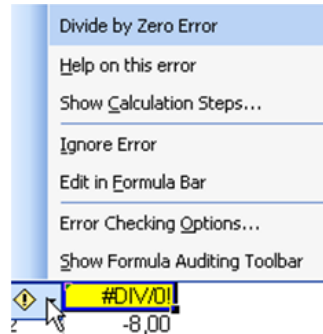
Δx	x	y
10	-100	-1.00
10	-90	-1.00
10	-80	-1.00
10	-70	-1.00
10	-60	-1.00
10	-50	-1.00
10	-40	-1.00
10	-30	-1.00
10	-20	-1.00
10	-10	-1.01
10	0	0.00

10	10	-1.01
10	20	-1.00
10	30	-1.00
10	40	-1.00
10	50	-1.00
10	60	-1.00
10	70	-1.00
10	80	-1.00
10	90	-1.00
10	100	-1.00



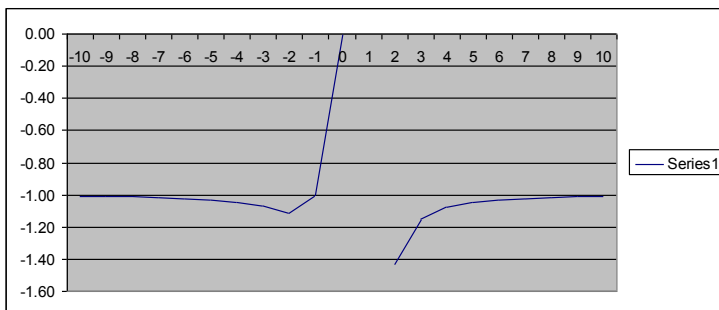
Поставити већу вредност Δx за анализу ширег интервала променљиве

Δx	x	y
1	-10	-1.01
1	-9	-1.01
1	-8	-1.01
1	-7	-1.02
1	-6	-1.02
1	-5	-1.03
1	-4	-1.05
1	-3	-1.07
1	-2	-1.11
1	-1	-1.00
1	0	0.00
1	1	
1	2	-1.43
1	3	-1.15
1	4	-1.08
1	5	-1.05
1	6	-1.03
1	7	-1.02
1	8	-1.02
1	9	-1.01
1	10	-1.01



Вертикална асимптота за $x = 1$.

Софтвер указује на дељење са нулом.
Изоставити приказивање овог поља (пребрисати).



б) Нуле функције, тачке прекида

Тачка прекида је $x = 1$, тј. у тој тачки функција није дефинисана.

$$y = 0 \Leftrightarrow x^3 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee (x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x = 0$$

Дакле, нула функције је тачка $A(0, y(0)) = A(0, 0)$, те је ова тачка пресек са осам координатног система.

Δx	x	y	
1	-10	-1.01	
1	-9	-1.01	
1	-8	-1.01	
1	-7	-1.02	
1	-6	-1.02	
1	-5	-1.03	
1	-4	-1.05	
1	-3	-1.07	
1	-2	-1.11	
1	-1	-1.00	
1	0	0.00	< 0
1	1	#div/0!	изостављено
1	2	-1.43	> 0
1	3	-1.15	
1	4	-1.08	
1	5	-1.05	
1	6	-1.03	
1	7	-1.02	
1	8	-1.02	
1	9	-1.01	
1	10	-1.01	

с) Знак функције

$y < 0$ за $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, тј. график је испод x -осе.

$y > 0$ за $x \in (0, 1)$, тј. график је изнад x -осе.

д) Парност, непарност функције

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 - x}{1 - (-x)^3} = \frac{-x^3 - x}{1 + x^3} = -\frac{x^3 + x}{1 + x^3} \neq f(x), \text{ па функција није парна.}$$

$$-f(x) = -\frac{x^3 + x}{1 - x^3} = \frac{x^3 + x}{-1 + x^3} \neq f(-x), \text{ па функција није непарна.}$$

Дакле, функција није ни парна, ни непарна.

е) Монотоност функције, екстремне вредности

$$y' = \left(\frac{x^3 + x}{1 - x^3} \right)' = \frac{(3x^2 + 1) \cdot (1 - x^3) - (x^3 + x) \cdot (-3x^2)}{(1 - x^3)^2}$$

$$= \frac{3x^2 - 3x^5 + 1 - x^3 + 3x^5 + 3x^3}{(1 - x^3)^2} = \frac{2x^3 + 3x^2 + 1}{(1 - x^3)^2}$$

Монотоност функције зависи од промене знака првог извода функције у околини стационарних тачака, које су нуле првог извода и кандидати за екстремне вредности функције.

$y' = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 + 1 = 0$, али ова једначина нема реалних решења, па функција нема екстремне вредности!

За $x \geq -1, y' > 0$, па функција расте, а за $x < -1, y' < 0$, па функција опада.

Превојне тачке ф-је су нуле другог извода, и у њима ф-ја мења своју конвексност.

$$y'' = (y')' = \left(\frac{2x^3 + 3x^2 + 1}{(1-x^3)^2} \right)' = \frac{(6x^2 + 6x) \cdot (1-x^3)^2 - (2x^3 + 3x^2 + 1) \cdot 4 \cdot (-6x^2)}{(1-x^3)^4} =$$

$$\frac{(6x^2 + 6x) \cdot (1 - 2x^3 + x^6) + 24x^2 \cdot (2x^3 + 3x^2 + 1)}{(1-x^3)^4} =$$

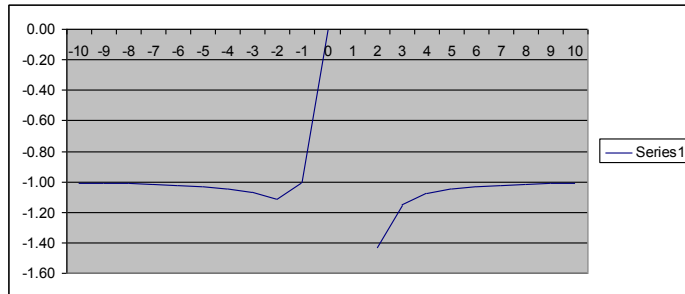
$$\frac{6x^2 - 12x^5 + 6x^8 + 6x - 12x^4 + 6x^7 + 48x^5 + 72x^4 + 24}{(1-x^3)^4} = \frac{6x^8 + 6x^7 + 36x^5 + 60x^4 + 6x^2 + 24}{(1-x^3)^4}, \quad \text{нема}$$

реалних нула другог извода, па нема ни превојних тачака.

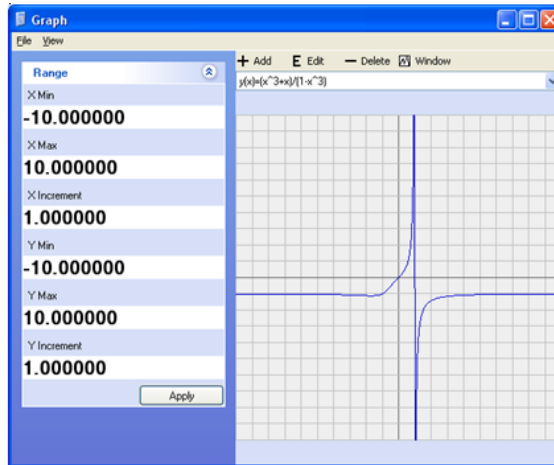
ф) Асимптоте функције

1. Вертикална асимптота је права $x = 1$, јер је $\lim_{x \rightarrow 1} y = \infty$.
2. Хоризонтална асимптота: $y = \lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x}{1 - x^3} = -1$, дакле, права $y = -1$ је хоризонтална асимптота.
3. Нема косу асимптоту.

г) График функције



Microsoft Excel

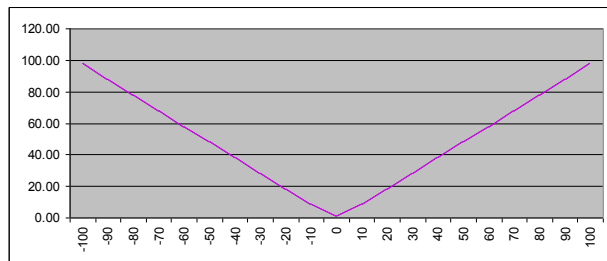


Power Toy Calculator

Пример 3. $y = \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}$

а) Област дефинисаности је цео скуп реалних бројева, \mathbb{R} .

Δx	x	y
10	-100	98.06
10	-90	88.07
10	-80	78.07
10	-70	68.08
10	-60	58.10
10	-50	48.12
10	-40	38.14
10	-30	28.19
10	-20	18.27
10	-10	8.50
10	0	1.00
10	10	8.50
10	20	18.27
10	30	28.19
10	40	38.14
10	50	48.12
10	60	58.10
10	70	68.08
10	80	78.07
10	90	88.07
10	100	98.06



Поставити већу вредност Δx за анализу ширег интервала променљиве

Δx	x	y
1	-10	8.50
1	-9	7.55
1	-8	6.60
1	-7	5.67

1	-6	4.75
1	-5	3.86
1	-4	3.00
1	-3	2.20
1	-2	1.50
1	-1	1.00
1	0	1.00
1	1	1.00
1	2	1.50
1	3	2.20
1	4	3.00
1	5	3.86
1	6	4.75
1	7	5.67
1	8	6.60
1	9	7.55
1	10	8.50

b) Нема нула функције, нема тачака прекида.

Δx	x	y
1	-10	8.50
1	-9	7.55
1	-8	6.60
1	-7	5.67
1	-6	4.75
1	-5	3.86
1	-4	3.00
1	-3	2.20
1	-2	1.50
1	-1	1.00
1	0	1.00
1	1	1.00
1	2	1.50
1	3	2.20
1	4	3.00
1	5	3.86
1	6	4.75
1	7	5.67
1	8	6.60
1	9	7.55
1	10	8.50

c) Знак функције: функција је позитивна за све вредности променљиве x , па је цео график изнад x -осе.

d) Парност, непарност

$$f(-x) = \frac{(-x)^2+2}{\sqrt{(-x)^2+2}} = \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}} = f(x), \text{ па је функција парна.}$$

e) Монотоност, екстремне вредности

$$y' = \frac{2x(x+2)-x^2-2}{(\sqrt{x^2+2})^2} = \frac{2x^2+4x-x^2-2}{(\sqrt{x^2+2})^2} = \frac{x^2+4x-2}{(\sqrt{x^2+2})^2},$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+8}}{2},$$

$x_1 = \frac{-4+2\sqrt{6}}{2}$, $x_2 = \frac{-4-2\sqrt{6}}{2}$, тј. $x_1 = -2 + \sqrt{6}$, $x_2 = -2 - \sqrt{6}$, односно, $x_1 = 0.4495$, $x_2 = -4.4495$.

Посматра се промена знака првог извода о околинема тачака x_1 , x_2 .

$y'(0) = -\frac{1}{2} < 0$, $y'(1) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} > 0 \rightarrow x_1$ је тачка максимума, $A(0.4495, 0.367)$.

$y'(-5) = \frac{43}{49} > 0$, $y'(-4) = -\frac{2}{36} = -\frac{1}{18} < 0 \rightarrow x_2$ је тачка минимума, $B(-4.4495, 3.2996)$.

ф) Асимптоте функције

1) Нема вертикалну асимптоту, јер нема тачака прекида.

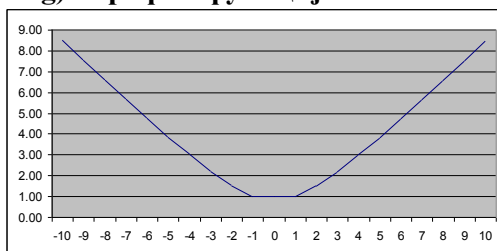
2) Хоризонтална асимптота: $y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2}+2} = \infty$, па функција нема ни хоризонталну асимптоту.

3) Коса асимптота: $y = kx + n$, $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2}{x \cdot \sqrt{x^2}+2} = 1$,

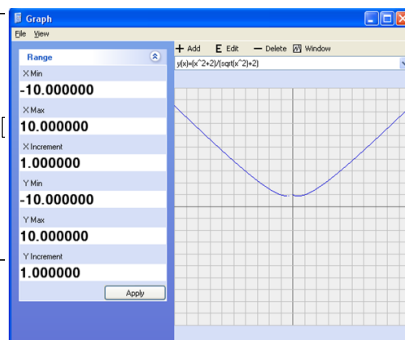
$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (y(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2}+2} - x \right) =$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2-x(\sqrt{x^2}+2)}{\sqrt{x^2}+2} \right) = -2$, дакле, коса асимптота је права $y = x - 2$.

г) График функције



Microsoft Excel



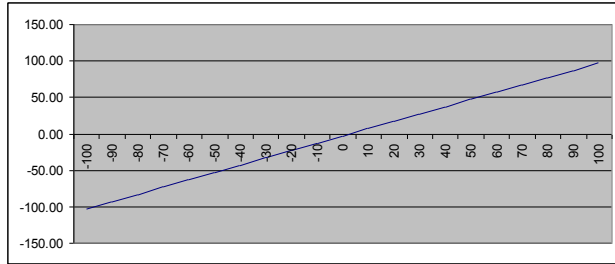
Power Toy Calculator

Пример 4. $f(x) = \frac{x^2-5x+7}{x-2}$

а) Област дефинисаности: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

Δx	x	y
10	-100	-103.01
10	-90	-93.01
10	-80	-83.01
10	-70	-73.01
10	-60	-63.02
10	-50	-53.02

10	-40	-43.02
10	-30	-33.03
10	-20	-23.05
10	-10	-13.08
10	0	-3.50
10	10	7.13
10	20	17.06
10	30	27.04
10	40	37.03
10	50	47.02
10	60	57.02
10	70	67.01
10	80	77.01
10	90	87.01
10	100	97.01



Поставити већу вредност Δx за анализу ширег интервала променљиве.

Δx	x	y
1	-10	-13.08
1	-9	-12.09
1	-8	-11.10
1	-7	-10.11
1	-6	-9.13
1	-5	-8.14
1	-4	-7.17
1	-3	-6.20
1	-2	-5.25
1	-1	-4.33
1	0	-3.50
1	1	-3.00
1	2	
1	3	1.00
1	4	1.50
1	5	2.33
1	6	3.25
1	7	4.20
1	8	5.17
1	9	6.14
1	10	7.13

b) Тачке прекида: тачка прекида је $x = 2$, тј. ту функција није дефинисана.

c) Нуле функције: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 7 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 28}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{-3}}{2} \notin \mathbb{R}$, па функција нема реалних нула, тј. нема пресека са x -осом.

$f(0) = -\frac{7}{2}$, па је тачка $A(0, -\frac{7}{2})$ пресек са y -осом.

Δx	x	y
1	-10	-13.08
1	-9	-12.09
1	-8	-11.10
1	-7	-10.11
1	-6	-9.13
1	-5	-8.14
1	-4	-7.17
1	-3	-6.20
1	-2	-5.25
1	-1	-4.33
1	0	-3.50
1	1	-3.00
1	2	
1	3	1.00
1	4	1.50
1	5	2.33
1	6	3.25
1	7	4.20
1	8	5.17
1	9	6.14
1	10	7.13

d) Парност, непарност функције:

$$f(-x) = \frac{x^2+5x+7}{-x-2} \neq f(x), \text{ што значи да функција није парна.}$$

$f(-x) = -\frac{x^2+5x+7}{x+2} \neq -f(x)$, па функција није непарна. Дакле, функција није ни парна ни непарна.

e) Знак функције: $f(x) < 0$, за $x \in (-\infty, 2)$, док је $f(x) > 0$, за $x \in (2, +\infty)$.

f) Асимптоте функције:

1) Вертикална асимптота:

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \frac{1}{0+} = +\infty; \lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \frac{1}{0-} = -\infty, \text{ што значи да је права } x = 2 \text{ вертикална асимптота и с лева и с десна.}$$

2) Хоризонтална асимптота: $y = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{0} = \infty$, па функција нема хоризонталну асимптоту.

3) Коса асимптота: $y = kx + n, k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-5x+7}{x^2-2x} = 1;$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-5x+7}{x-2} - x \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-5x+7-x^2+2x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x+7}{x-2} = -3, \text{ па је права } y = x - 3 \text{ коса асимптота дате функције.}$$

g) Монотоност, екстремне вредности, конвексност

$$y' = \left(\frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} \right)' = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}$$

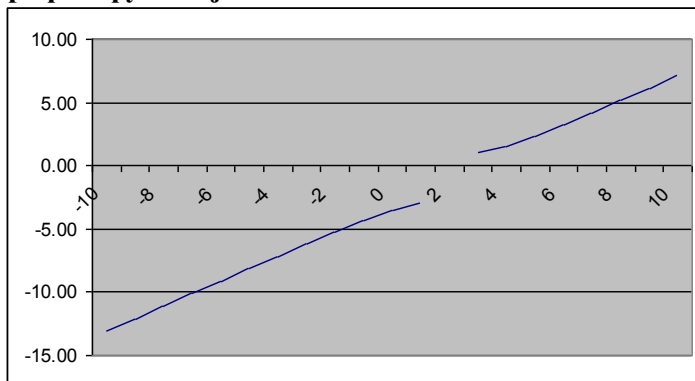
$$x^2 - 4x + 3 = 0 \leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = 3$$

$T_{min} = (3,1), T_{max} = (1,-3)$, су тачке минимум и максимума функције, респективно.

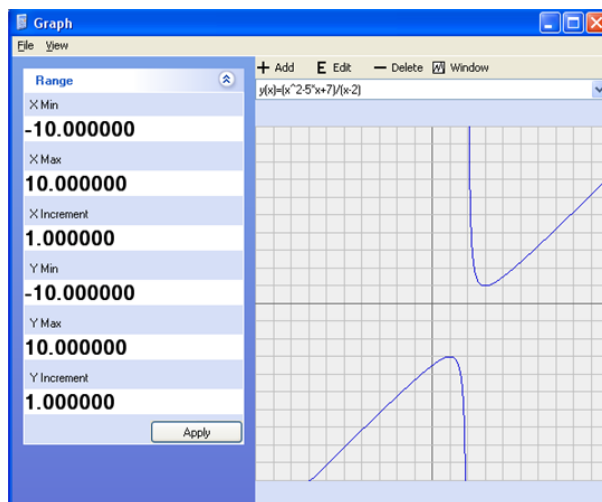
Конвексност: $y'' = \left(\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}\right)' = \frac{2x-4}{(x-2)^4}$, за $x \in (-\infty, 2)$ функција је конвексна нагоре, док је за $x \in (2, +\infty)$, функција конвексна надоле.

Тачка $x = 2$ је превојна тачка, али како $x = 2 \notin D(f)$, онда ова тачка није превојна за дату функцију.

h) График функције



Microsoft Excel



Power Toy Calculator

Закључак

На основу само неколико релативно карактеристичних примера функције реалне променљиве, може се закључити да *MS Excel* подржава испитивање основних особина функције $y = f(x)$. Поступци изра-

чунавања функција без програмске подршке одузимају доста времена и могућа је појава грешака. Примена *MS Excela* је једна од могућности примене комбиновања математике и информатике у образовању, где се временски и мукотрпни рад поступака без програмске подршке може скратити коришћењем *MS Excela*. Насупрот лакшим функцијама, посебно компликоване облике функција је тешко представити, скоро и немогуће. Овим радом не желимо приказати да је *MS Excel* замена поступку анализе тока реалне променљиве без програмске подршке, већ да је могућа примена *MS Excela* за испитивање функције реалне променљиве облика $y = f(x)$.

Литература

1. Adnađević, D., Kadelburg, Z. (1995). *Matematička analiza I*. Beograd: Studentski trg.
2. Богдановић, М. (2010). *Задаци из Математике I за студенте Учитељског факултета*, збирка задатака. Врање: Универзитет у Нишу, Учитељски факултет.
3. Лазић М., Малиновић Т., Мићић В., Петровић М., Томић М. (1994). *Математика*. Београд.
4. Miličić, M. (2012). *Matematička analiza*. Beograd: Akademska misao.

Milena Bogdanovic, Ph.D.

Lazar Stosic, Ph.D.

COMPARATIVE ANALYSIS OF FLOW REAL FUNCTIONS OF A REAL VARIABLE WITH AND WITHOUT PROGRAM SUPPORT

Summary: *The function is one of the fundamental concepts in mathematics. It occurs in various areas of mathematics that depends on what are the domain and kodomen. U calculus, but also in other fields, the most commonly used functions of a real variable. Under the function of a real variable we mean a function $f: X \rightarrow Y$, where $X \subseteq \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}$. This paper presents a comparative view of the analysis and testing of the flow function of the form $y = f(x)$ and the graph with the help of MS Excel, and flow analysis of real functions without using the software. For examples were taken a few real functions were evaluated for their flow. The results of the computation are done without software support and with the help of Microsoft Excel and Power Toy Calculator to graph functions. The results are presented and from it is possible to see differences in the results obtained.*

Key words: *functions of a real variable, testing the function $y = f(x)$, Microsoft Excel, Power Toy Calculator.*

Примљено: 27. 8. 2013. године.

Одобрено за штампу: 28. 11. 2013. године.