Мс Марко СТАНКОВИЋ
Учитељски факултет у Врању
Универзитет у Нишу

УДК 510.223
-стручни рад-

ГЕОМЕТРИЈСКА НЕПРЕКИДНОСТ*

Сажетак: Циљ рада је савремено заснивање геометријске теорије непрекидности, која се темељи на два аксиома четврте групе – Архимедовом и Канторовом аксиомом. Доказане су разне последице Архимедове и Канторове аксиоме, попут Канторове и Дедекиндове теореме. Дат је посебан осврт на Хилбертово аксиоматско заснивање геометрије, које уместо Канторове аксиоме користи аксиому линеарне потпуности. На крају, рад илуструје употребу аксиома непрекидности и њихових последица у доказивању неких теорема.

Кључне речи: Аксиоме непрекидности, Архимедова аксиома, Кантова аксиома, Дедекиндова теорема, Аксиома линеарне потпуности.

1. Историјски развој

Геометрија као научна дисциплина има своју дугу и богату традицију. Када су негде у VI веку пре нове ере водећу улогу у култури и науци преузели Грци, геометрија почиње да се развија једним сасвим новим путем. Индуктиван метод налажења тврђења био је замењен дедуктивним методом, којим се, најпре, установљују општа тврђења, да би се затим из њих добила појединачна сазнања. Старогрчки филозоф и математичар Талес први је дошао до начела да је потребно доказивати геометријска тврђења. Ово начело у много већој мери почео је да спроводи чувени филозоф и математичар Питагора (око 580-око 500. пре н. е.).

Мноштво доказаних геометријских тврђења је било довољно да се постави питање редоследа њиховог излагања. Тај редослед у доказивању геометријских тврђења је представљао једно ново начело, тзв. начело систематизације. Најсистематичнија књига из геометрије античких времена која је доспела до нас су *Елементи*, дело старогрчког математичара Еуклида (око 365-270. пре н. е.). Међутим, Еуклид је подразумевао геометријску непрекидност, па већ у првом ставу прве књиге својих *Елемената*, доказујући да постоји правилан троугао коме су задата тачка A и B , конструише кругове $k(A, AB)$ и $k(B, BA)$ и без доказа за-

* Рад је додатак мастер тези *Еквивалентни облици аксиоме непрекидности скупа реалних бројева* која је одбрањена 16. октобра 2012. године на Математичком факултету у Београду под менторством проф. др Зорана Каделбурга.

кључује да они имају заједничких тачака. Слично, у дванаестом ставу прве књиге, конструишући управну из задате тачке A на правој p , Еуклид претпоставља да сваки круг са средиштем A , који има тачака са оне стране праве p , са које није A , сече праву p у двама тачкама. Потреба да се оваква тврђења докажу није исказивана све до друге половине прошлог века када је Паш 1882. године, у својој *Новијој геометрији*, истакао неопходност заснивања геометријске непрекидности полазећи од засебних аксиома.

2. Аксиоме непрекидности

Аксиоме геометрије сврставамо у пет група:

- 1) девет *аксиома припадања* или *аксиома инцидентције* изражава скуповне односе између тачака, правих и међу равнима;
- 2) шест *аксиома распореда* изражава основне особине релације $\mathcal{B}$ (између);
- 3) седам *аксиома подударности* изражава особине релације $\mathcal{C}$ (подударно);
- 4) две *аксиоме непрекидности*;
- 5) *аксиома паралелности*.

Геометријска теорија непрекидности се темељи на двама аксиомама четврте групе, од којих се прва назива Архимедовом или Архимед-Еудоксовом, а друга Канторовом.

А 1. Ако су AB и CD две произвољне дужи, тада на полуправој AB постоји коначан низ тачака $A_1, A_2, \dots, A_n$ таквих да је $B \in (A_{n-1}, A_n)$ и $\mathcal{B}(A_1, A_2 \dots A_n)$, при чему је свака од дужи $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$, подударна дужи CD .

Слика 1. Архимедова аксиома

А 2. Ако је $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n, \dots$ бесконачан низ затворених дужи неке праве, таквих да свака од тих дужи садржи следећу, тада постоји тачка X која припада свакој дужи тога низа.

Слика 2. Канторова аксиома

Аналогно се дефинишу одговарајуће аксиоме непрекидности за углове.

A.1'. Ако су $\angle AOB$ и $\angle COD$ два произвољна позитивно оријентисана угла, тада у равни AOB постоји коначан низ полуправа $OA_1, OA_2 \dots OA_n$, таквих да полуправа OB припада углу $A_{n-1}OA_n$ и углови $AOA_1, A_1OA_2 \dots A_{n-1}OA_n$ су суседни при чему је сваки од углова $AOA_1, A_1OA_2 \dots A_{n-1}OA_n$ подударан углу COD .

Слика 3. Архимедова аксиома за углове

A.2'. Ако је $[\angle A_1OB_1], [\angle A_2OB_2], \dots, [\angle A_nOB_n], \dots$ бесконачан низ затворених углова неке равни, таквих да сваки од тих углова садржи следећи, тада постоји полуправа OX која припада сваком углу тога низа.

Слика 4. Канторова аксиома за углове

Хилберт у својој књизи *Основе геометрије* уместо Канторове аксиоме користи аксиому *линеарне потпуности*, а затим доказује и одговарајући став:

A 3. Систем тачака неке праве са својим релацијама распореда и конгруенције¹ не може се тако проширити, да остану очуване релације које постоје између претходних елемената, као и основне особине линеарног распореда и конгруенције које проистичу из прве три групе аксиома и Архимедове аксиоме.

¹ Хилберт овај термин користи као синоним за „једнакост“, „подударност“.

Под основним особинама линеарног распореда Хилберт подразумева:

- прве три аксиоме распореда;
- ма које четири тачке једне праве могу се увек означити са A, B, C, D тако да за тачку B важи распоред $B(A, B, C)$ и $B(A, B, C)$, а за тачку C важи $B(A, C, D)$ и $B(B, C, D)$ (тј. $B(A, B, C, D)$);
- прве три аксиоме подударности;
- једнозначност преношења дужи.

Став. (став потпуности): Елементи геометрије (тј. тачке, праве и равни) образују систем који, уз прве три групе аксиома и Архимедову аксиому, не допушта више никакво проширење помоћу тачака правих и равни.

Доказ. Претпоставимо супротно – да се систем може проширити неким новим елементом. Претпоставка неког новог елемента непосредно доводи до претпоставке неке нове тачке N . Елементе који постоје пре проширења назваћемо старим елементима.

Према осмој аксиоми инциденције постоје четири тачке A, B, C, D које нису у једној равни. Ознаке се могу тако изабрати да тачке A, B, N не леже на једној правој. Обе равни ABN и ACD , различите једна од друге, имају, према седмој аксиоми инциденције, осим заједничке тачке A , још и заједничку тачку E . Тачка E не лежи на правој AB , јер би иначе тачка B лежала у равни ACD . У случају да је E нова тачка, онда у старој равни ACD лежи нова тачка E ; у случају пак да је E стара, нова тачка N лежи у старој равни, наиме, у равни ABE . У сваком случају, дакле, нова тачка лежи у старој равни.

У старој равни постоји стари троугао FGH , а на дужи FG стара тачка I . Ако спојимо нову тачку L са тачком I , тада ће се, према четвртој аксиоми распореда, праве IL и FH или праве IL и GH сећи у тачки K , ако нова тачка L не лежи на правој IH .

Слика 5. Став потпуности

У случају да је K нова тачка, то нова тачка K лежи на старој правој FG или GH ; у случају пак да је K стара тачка, онда нова тачка L лежи на старој правој IK . Дакле, све три претпоставке противурече

аксиоми линеарне потпуности. Према томе, треба одбацити претпоставку нове тачке у старој равни и тиме, уопште, претпоставку нових елемената.

3. Последице Архимедове и Канторове аксиоме

Теорема 1. Ако је дуж a мања од дужи b , тада постоји природан број n такав да је $(n-1)a \leq b < na$.

Доказ. Теорема је тривијална последица Архимедове аксиоме.

Теорема 2. Ако је дуж a мања од дужи b , онда за сваку дуж c постоје природни бројеви m и n такви да је $a < \frac{m}{2^n}c < b$.

Доказ. Како је $b-a > 0$ на основу Архимедове аксиоме постоји природан број n такав да је $c < 2^n(b-a)$ па је $\frac{1}{2^n}c < b-a$.

Ако је $\frac{1}{2^n}c > a$, онда је $a < \frac{1}{2^n}c < b-a < b$, па је теорема доказана за случај $m=1$.

Ако је $\frac{1}{2^n}c < a$, онда, на основу претходне теореме, постоји број m такав да је $(m-1)\frac{1}{2^n}c \leq a < m\frac{1}{2^n}c$.

Тада је $a < \frac{m}{2^n}c = \frac{1}{2^n}c + \frac{m-1}{2^n}c < (b-a) + a = b$. $\square$

Дефиниција 1. Канторов низ је низ дужи $(A_k B_k)_{k=1,2,\dots}$ који задовољава аксиому (2), такав да не постоји дуж која је садржана у свим дужима тога низа.

Теорема 3. (Канторова теорема). Постоји јединствена тачка која припада Канторовом низу.

Доказ. Нека је X тачка чије је постојање претпостављено Канторовом аксиомом. Претпоставимо да постоји, поред тачке X , и нека друга тачка Y , која припада свакој од дужи датог низа, онда би тачка Z дужи XY припадала свакој дужи Канторовог низа, што није у складу са његовом дефиницијом. Тиме је доказана јединственост тачке X . $\square$

Теорема 4. Не постоји дуж која би била мања од сваке дужи Канторовог низа.

Доказ. На основу претходне теореме, постоји јединствена тачка X , садржана у свим дужима Канторовог низа дужи $[A_k B_k]_{k=1,2,\dots}$ на правој

p . Како су за свако k , A_k и B_k са разних страна тачке X , можемо претпоставити да су све тачке A_k са једне, а све тачке B_k са друге стране тачке X . Пошто је дуж $A_k B_k$ унија дужи $A_k X$ и $X B_k$, а садржи дуж $A_{k+1} B_{k+1}$, тачка A_{k+1} припада дужи $A_k X$, а тачка B_{k+1} припада дужи $X B_k$.

Ако је x произвољна дуж, на правој p постоји тачка A са оне стране X са које су и све тачке A_k , и тачка B са оне стране X са које су и све тачке B_k таква да је X средиште AB која је подударна датој дужи x . Када на дужи AX не би било ниједне од тачака A_k , било би за свако k , $B(A_k, A, X)$, па би дуж AX припадала свакој од дужи Канторовог низа. Дакле, за довољно велико n све тачке A_k , $k > n$ су између X и B па, за довољно велико n , дуж AB садржи сваку од дужи $A_n B_n$. Стога је $A_n B_n < AB = x$.

Дакле, за довољно велико n , дужи XA_n и XB_n су мање од било које унапред задате дужи. $\square$

Теореме аналогне последицама Архимедове аксиоме и Канторове аксиоме могу се показати и за углове.

Још једна значајна последица аксиома непрекидности је *Дедекиндова теорема*.

Теорема 5. (Дедекиндова теорема за праву). Ако су све тачке неке праве p подељене у два скупа $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, таква да:

- (1) Свака тачка праве p припада само једном од скупова $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$,
- (2) скупови $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ су непразни,
- (3) између било којих двеју тачака једног од тих скупова нема тачака које припадају другом, тада постоји јединствена тачка X на правој p таква да су све остале тачке скупа $\mathcal{M}$ са једне стране те тачке, а остале тачке скупа $\mathcal{N}$ са друге.

У исказу Дедекиндове теореме може изоставити јединственост тачке X . Наиме, једноставно се може доказати да је тачка X са траженим својствима јединствена.

Доказ. Како су скупови $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ непразни, постоје тачке M_1 и N_1 које припадају скуповима $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ респективно. Означимо са S_1 средиште дужи $M_1 N_1$. Тачка S_1 припада правој p на основу услова (1), припада тачно једном од скупова $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Ако тачка S_1 припада скупу $\mathcal{M}$, обележићемо је са M_2 , а тачку N_1 са N_2 , а ако S_1 припада скупу $\mathcal{N}$, обележићемо је са N_2 , а M_1 са M_2 . Нека је S_2 средиште дужи $M_2 N_2$. Понављајући започети поступак одредићемо тачке M_3 и N_3

итд. На тај начин конструисаћемо низ $[M_k N_k]_{k=1,2,\dots}$ затворених дужи, од којих свака дуж садржи следећу у том низу. Такав низ зовемо *низом полинома дужи*.

Докажимо да не постоји дуж која је садржана у свим дужима конструисаног низа половина. Ако би, напротив, постојала таква дуж r , онда би за свако k било $x < (1/2^{k-1})M_1 N_1$, тј. $2^{k-1}x < M_1 N_1$ за свако k , што противречи Архимедовој аксиоми. Дакле, низ $[M_k N_k]_{k=1,2,\dots}$ је Канторов, па постоји јединствена тачка X која припада свакој дужи низа половина дужи.

Из конструкције низа дужи следи да су све тачке низа $(M_k)_{k=1,2,\dots}$ са једне стране тачке X , а све тачке низа $(N_k)_{k=1,2,\dots}$ са друге. Докажимо да су и све остале тачке скупа $\mathcal{M}$ са једне стране тачке X , а све остале тачке скупа $\mathcal{N}$, са друге. Тачка X припада само једном од скупова $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, рецимо скупу $\mathcal{N}$. Ако је X произвољна тачка скупа $\mathcal{N}$ различита од X , тада је она са оне стране X , са које су и тачке низа $(N_k)_{k=1,2,\dots}$. Заиста, ако би било $B(N, X, N_k)$ тачка N би била са стране X са које су и тачке низа $(M_k)_{k=1,2,\dots}$ па би, за довољно велико k , тачка M_k била између N и X . Дакле, постојала би тачка скупа $\mathcal{M}$ између двеју тачака скупа $\mathcal{N}$.

Ако је пак M произвољна тачка скупа $\mathcal{M}$, тада не може бити $B(M_k, X, N)$ јер би постојала тачка скупа $\mathcal{N}$ између двеју тачака скупа $\mathcal{M}$. Дакле, постоји јединствена тачка X , таква да су све остале тачке скупа $\mathcal{M}$ са једне стране тачке X , а све остале тачке скупа $\mathcal{N}$, са друге.

За тачку X кажемо да раздваја скупове $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$.

Слично се доказује да важи и Дедекиндова теорема за полуправу и Дедекиндова теорема за дуж. Ако се претпостави да уз аксиоме прве три групе важи и Дедекиндова теорема за дужи, тада важе и Архимедова и Канторова аксиома.

Теорема 6. Ако уз аксиоме прве три групе важи и Дедекиндова теорема за дужи, тада важе и Архимедова и Канторова аксиома.

Доказ. Ако претпоставимо да постоје дужи AB и CD и низ тачака $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ на полуправој AB таквих да је $B(A_1, A_2, \dots, A_n, \dots)$ а све дужи $AA_1, A_1 A_2, \dots, A_{n-1} A_n, \dots$ су подударне дужи CD и садржане су у дужи $[AB]$ тада скуп тачака дужи $[AB]$ можемо поделити у два подскупа $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, таква да су у скупу $\mathcal{M}$ све тачке које припадају дужима $[AA_1], [A_1 A_2], \dots, [A_{n-1} A_n], \dots$, а у скупу $\mathcal{N}$ све остале тачке дужи $[AB]$. Како скупови $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ задовољавају услове Дедекиндове теореме за дужи, постојаће тачка X која раздваја скупове $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Ако је Y тачка праве AB са оне стране тачке X са које је A , таква да је $XY \cong CD$,

тада је тачка Y у скупу $\mathcal{M}$, па припада некој дужи $[AA_1], [A_1A_2], \dots, [A_{n-1}A_n], \dots$, на пример дужи $A_{i-1}A_i$, што је немогуће јер би тада тачке A_i и A_{i-1} припадају отвореној дужи XY , а $XY \cong CD \cong A_iA_{i-1}XY \cong CD$. Тиме је доказана Архимедова аксиома.

Да бисмо доказали Канторову аксиому, претпоставимо да је $[AA_1], [A_1A_2], \dots, [A_{n-1}A_n], \dots$ низ затворених дужи неке праве, таквих да свака од тих дужи садржи следећу. Можемо претпоставити да је $B(A_1, A_2, \dots, A_n, \dots, B_n, \dots, B_2, B_1)$, скуп тачака дужи $[A_1B_1]$. Како скупови $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ задовољавају услове Дедекиндове теореме за дужи, постојаће тачка X која раздваја скупове $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Како је за свако i , између тачака A_i и B_i , тачка X припада свакој дужи низа $[A_1B_1], [A_2B_2], \dots, [A_nB_n], \dots$ Тиме је доказано да су Архимедова и Канторова аксиома последица Дедекиндове теореме. $\square$

4. Последице аксиома непрекидности

Многе теореме које су наизглед очигледне не могу се доказати без примене аксиома непрекидности. Ево неколико примера таквих теорема.

Теорема 7. Ако је дат круг $k(O, r)$ и тачка P унутар круга k тада произвољна права l у равни круга k , која садржи тачку P има са кругом k две заједничке тачке.

Доказ. Могу наступити два случаја:

- права l садржи средиште O круга k ,
- права l не садржи средиште O круга k .

Први случај. Нека тачка O припада правој l . Тада постоје тачке X и Y на правој l са разних страна тачке O , такве да је $OX \cong r$ и $OY \cong r$, па права l има са кругом $k(O, r)$ две заједничке тачке X и Y .

Други случај. Нека сада тачка O не припада правој l . Означимо са A_0 подножје нормале из тачке O на правој l . Тада ће бити $OA_0 \leq OP$. Како је тачка P унутар круга k , биће $OP < r$, те је и $OA_0 < r$. Одредимо на правој l са било које стране тачке A_0 тачку B_0 такву да је $A_0B_0 \cong r$.

У правоуглом троуглу OA_0B_0 хипотенуза OB_0 је већа од катете A_0B_0 па

Слика 6. Пресеци праве и круга

је $OB_0 > r$, тј. тачка B_0 је ван круга k . Нека је C_0 средиште дужи A_0B_0 . У том случају за тачку C_0 могу наступити три могућности: $OC_0 \cong r$, $OC_0 < r$ и $OC_0 > r$.

Ако је $OC_0 \cong r$, тврђење следи непосредно. Ако је тачка C_0 унутар круга k , означимо са A_1 тачку C_0 , а са B_1 тачку B_0 . Ако је тачка C_0 изван круга k , означимо са A_1 тачку A_0 , а са B_1 тачку C_0 . У оба случаја је $OA_1 < r$ и $OB_1 > r$, дуж A_1B_1 је једнака половини дужи A_0B_0 и садржана је у њој. Означимо са C_1 средиште дужи A_1B_1 . За тачку C_1 имамо следеће могућности: $OC_1 \cong r$, $OC_1 < r$ и $OC_1 > r$. Ако је $OC_1 > r$ обележимо са A_2 тачку A_1 , а са B_2 тачку C_1 , а ако је $OC_1 < r$, онда означимо са A_2 тачку C_1 , а са B_2 тачку B_1 . У оба случаја је $OA_2 < r$, $OB_2 > r$, па је дуж A_2B_2 једнака половини дужи A_1B_1 и садржана је у њој.

Настављајући тај поступак после n корака добијамо да је:

$$OA_n < r, \quad OB_n > r, \quad A_nB_n = \frac{1}{2^n} A_0B_0, \quad [A_nB_n] \subset [A_{n-1}B_{n-1}].$$

Према томе, добили смо низ затворених дужи $[A_nB_n]$ за који је испуњена Канторова аксиома и не постоји дуж садржана у свим дужима тог низа.

Заиста, јер ако би постојала таква дуж d која би припадала свим дужима тог низа дужи, тада број n можемо изабрати тако да дуж $[A_nB_n]$ буде мања од било које унапред задате дужи, па и од дужи d , па би већа дуж d била садржана у мањој дужи A_nB_n , што је немогуће.

Дакле, низ (A_nB_n) је Канторов низ, па на основу теореме 3 постоји јединствена тачка X која припада свим дужима тог низа дужи. Докажимо да тачка X припада кругу k , тј. да је једна од пресечених тачака праве l и круга k . Довољно је да докажемо да је $OX \cong r$. За дужи OX и r важи тачно једна од следећих три могућности: $OX < r$, $OX > r$, $OX \cong r$.

Нека је $OX < r$. Тада постоји нека дуж ε таква да је $OX = r - \varepsilon$. Из троугла AXB_n имамо $OB_n < OX + XB_n$. Тачка X припада дужи $[A_nB_n]$, па је $XB_n < A_nB_n$. Можемо изабрати довољно велики број n , такав да дуж $[A_nB_n]$ буде мања од било које унапред задате дужи ε . Тада је $XB_n < \varepsilon$, па је $OB_n < r - \varepsilon + \varepsilon = r$. Дакле, добили смо да тачка B_n припада унутрашњости круга што представља контрадикцију. Према томе није $OX < r$. Аналогно се доказује да није $OX > r$.

Значи, мора бити $OX \cong r$, тј. тачка X припада кругу k .

За тачку Y праве l симетричну тачки X у односу на тачку A_0 непосредно се добија да припада кругу k . Дакле, права l и круг k имају две заједничке тачке X и Y . Није тешко закључити да, осим двеју тачака, круг k и права l немају других заједничких тачака. $\square$

Теорема 8. Ако два круга k и k' припадају једној равни и ако један од та два круга, нпр. k' садржи неку тачку A која се налази унутар круга k и неку тачку B ван круга k , тада кругови k и k' имају две заједничке тачке.

Слика 7. Пресеци два круга

Доказ. Нека су O и O' средишта, а r и r' полупречници редом кругова k и k' . Означимо са s медијатрису једног од углова $\angle AO'B$. Полуправа s има са кругом k' једну заједничку тачку, означимо је са C . При томе је или $OC \cong r$, $OC < r$ или $OC > r$. Ако је $OC \cong r$, тада је тачка O једна заједничка тачка кругова k и k' . Ако је $OC < r$, обележимо са A_1 тачку C а са B_1 тачку B . Ако је пак $OC > r$, обележимо са A_1 тачку A а са B_1 тачку C . У оба случаја је $OA_1 < r$, $OB_1 > r$ и $\angle A_1O'B_1 = \frac{1}{2} \angle AO'B$.

Конструишимо медијатрису угла $A_1O'B_1$ и означимо са C_1 заједничку тачку медијатрисе s_1 и круга k' . За тачку C_1 постоје три могућности: $OC_1 \cong r$, $OC_1 < r$ или $OC_1 > r$. Ако је $OC_1 \cong r$, тада је тачка C_1 заједничка тачка кругова k и k' . Ако је $OC_1 < r$, означимо са A_2 тачку C_1 а са B_2 тачку B_1 , а ако је пак $OC_1 > r$, онда означимо са A_2 тачку A_1 а са B_2 тачку C_1 . Тада је у оба случаја $OA_2 < r$, $OB_2 > r$ и $\angle A_2O'B_2 = \frac{1}{2^2} \angle AO'B$.

Настављајући тај поступак добијамо тачке A_n и B_n такве да је $OA_n < r$, $OB_n > r$ и $\angle A_n O' B_n = \frac{1}{2^n} \angle AO' B$. На тај начин је добијен неограничени низ затворених углова који задовољава Канторову аксиому за углове и не постоји угао садржан у свим угловима тога низа.

Тада, према Канторовој теореми за углове следи да постоји јединствена полуправа s' , садржана у свим угловима тог низа. Означимо са X тачку те полуправе, такву да је $O'X \cong r'$, то јест тачку у којој полуправа s' сече круг k' . Докажимо да тачка X припада и кругу k . У том случају за тачку X могу наступити три могућности: $OX < r$, $OX > r$ или $OX \cong r$.

Нека је $OX < r$. У том случају постоји нека дуж ε таква да је $OX = r - \varepsilon$. У троуглу AXB_n је $OB_n < OX + XB_n$. Број n можемо изабрати тако да тетива $A_n B_n$ буде мања од било које унапред задате дужи ε . Како је тачка X унутрашња тачка дужи $[A_n B_n]$ то је $XB_n < A_n B_n$ па је $XB_n < \varepsilon$. Према томе, имамо да је $OB_n < r - \varepsilon + \varepsilon = r$, па је B_n унутрашња тачка круга k , што је у контрадикцији са конструкцијом низа тачака $B_0, B_1, B_2, \dots$. Дакле није $OX < r$.

На потпуно исти начин и претпоставка $OX > r$ доводи до контрадикције.

Према томе, мора бити $OX \cong r$, тј. тачка X припада кругу k . Разматрањем другог угла $AO'B$ аналогним поступком добијамо другу пресечну тачку Y кругова k и k' .

5. Закључак

Помоћу претходних разматрања захтев непрекидности је разложен на два различита дела. Према Архимедовој аксиоми, свака тачка праве, ма колико далеко била, може се достићи коначним бројем преношења задате дужи. Канторова аксиома непосредно тврди да је права густо испуњена тачкама. Међутим, уместо аксиома непрекидности у аксиоматском заснивању геометријске непрекидности можемо узети само Дедекиндову теорему пошто је показано да је Дедекиндова теорема еквивалентна конјункцији Архимедове и Канторове аксиоме. Напоменимо још и то да је Хилбертова аксиома линеарне потпуности еквивалента Канторовој аксиоми.

Без аксиома непрекидности немогуће је показати да раван π , која садржи произвољну тачку P унутар неке сфере $S(O, r)$ са том сфером има непразан пресек. Такође, није могуће показати да сфера $S(O, r)$, која садржи произвољну тачку P унутар неке сфере $S_1(O_1, r_1)$ и неку тачку Q изван те сфере, са сфером S има непразан пресек. У оба случаја пресек је круг.

Литература

1. Еуклид (1957). *Елементи*. Београд: Научна књига.
2. Лопандић, Д. (1979). *Геометрија*. Београд: Научна књига.
3. Лучић, З. (1997). *Еуклидска и хиперболичка геометрија*. Београд: Математички факултет, Београд.
4. Лучић, З. (2009). *Огледи из историје античке геометрије*. Београд: Службени гласник.
5. Martin, G. (1982). *The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane*. New York: Intext Educational Publishers.
6. Станковић М. (2006). *Основи геометрије*. Ниш: Природно математички факултет, Ниш.
7. Хилберт, Д. (1957). *Основе геометрије*. Београд: Научно дело.
8. Червар, Б., Ерцег Г., Лекић И. (2012). *Основе геометрије* Преузето Октобра 22, 2013. са WWW: <http://www.pmfst.hr/~gorerc/OG-materijali/OG-2012-13.pdf>

Ms Marko Stankovic

THE GEOMETRIC CONTINUITY

Summary: *The aim of this paper is modern establishment of geometric theory of continuity, which is based on two, fourth group axioms - Archimedes' and Cantor's axiom. Various consequences of Archimedes' and Cantor's axioms are proven such as Cantor's and Dedekind's theorem. The paper gives a special view on Hilbert's axiomatic establishment of geometry which uses axiom of linear completeness instead of Cantor's axiom. Finally, the paper illustrates the use of the axioms of continuity and their consequences in proving some theorems.*

Key words: *Axioms of continuity, Archimedes' axiom, Cantor's axiom, Dedekind's theorem, Axiom of linear completeness.*

Примљено: 26. 10. 2013. године.
Одобрено за штампу: 28. 11. 2013. године.