UDK: 512:517.9
Datum prijema rada: 22.04.2015.
Datum korekcije rada: 28.04.2015.
Datum prihvatanja rada: 29.04.2015.

STRUČNI RAD

EKONOMIJA
TEORIJA I PRAKSA
Godina VIII • broj 2
str. 47–64

PROBLEM USLOVLJENE OPTIMIZACIJE U NEOKLASIČNOJ TEORIJI FIRME

Meta Mehmed[1]

Sažetak: *U dugom vremenskom periodu svi faktori proizvodnje su varijabilni, za razliku od kratkog perioda u kome su neki od njih fiksnog karaktera. Iako realni proizvodni procesi koriste brojne inpute, razmatranje slučaja proizvodnje sa dva varijabilna inputa u velikoj meri pojednostavljuje analizu proizvodnje u dugom vremenskom periodu. Za ekonomsku analizu proizvodnje koja se karakteriše varijabilnošću svih faktora proizvodnje je interesantna ona odluka koja se odnosi na izbor kombinacije dva inputa čijim će se korišćenjem ostvariti maksimalno moguća proizvodnja ili dati obim proizvodnje ostvariti sa minimalnim iznosom ukupnih troškova.*

Polazeći od algebarski vrlo jednostavne funkcije (poznate pod nazivom kao Kob-Daglasova funkcija proizvodnje) u ovom radu ćemo razmotriti problem optimizacije, odnosno izbora kombinacije korišćenja proizvodnih inputa pri kojima se uz dati nivo ukupnih troškova i date cene proizvodnih inputa može ostvariti maksimalno moguća proizvodnja (problem uslovljene maksimizacije) i izbora kombinacije korišćenja proizvodnih inputa koji pri konstantnim cenama inputa omogućava ostvarenje datog nivoa outputa sa minimalnim troškovima proizvodnje (problem uslovljene minimizacije).

Ključne reči: *uslovljena maksimizacija / uslovljena minimizacija / Lagranževa jednačina / Kob-Daglasova funkcija / elastičnost / cene proizvodnih inputa / prinos na obim*

UVOD

Određeni nivo outputa u dugom vremenskom periodu može biti ostvaren različitim kombinacijama proizvodnih inputa. Problem izbora kombinacije proizvodnih inputa koji obezbeđuju ostvarenje maksimalne proizvodnje pri datom nivou troškova ili izbora kombinacije inputa pri ostvarenju datog obima proizvodnje sa naj-

1 Internacionalni Univerzitet u Novom Pazaru, Dimitrija Tucovića bb,
e-mail: m.meta@uninp.edu.rs

nižim troškovima bazira se na konceptu maksimiziranja pozitivne razlike između ukupnog prihoda i ukupnih troškova, odnosno maksimiziranja ukupnog profita preduzeća pri datim ograničenjima.

Objašnjenje problema optimalnog ponašanja preduzeća u ovom radu polazi od sledećih pretpostavki:

- preduzeće proizvodi samo jednu vrstu proizvoda koristeći samo dva varijabilna inputa (rad i kapital);
- proizvodna funkcija, kao način transformacije inputa u outpute, ima algebarski vrlo jednostavan oblik (poznata pod nazivom Kob-Daglasova funkcija proizvodnje) i
- preduzeće svoje proizvode prodaje na savršeno konkurentnom tržištu outputa, a nabavku faktora proizvodnje vrši na savršeno konkurentskom tržištu inputa.

Teorijski posmatrano pred proizvođačima stoji mnoštvo različitih alternativa u pogledu izbora količine faktora proizvodnje. Svaka od alternativa će rezultirati određenim obimom proizvodnje i iznosom ukupnih troškova, odnosno visinom profita. Proces odlučivanja, između ostalog, podrazumeva definisanje pojma najbolje alternative iz seta raspoloživih mogućnosti. Pošto polazimo od stava da preduzetnik teži ostvarenju što većeg profita, to će kao parametar za vrednovanje alternativa poslužiti njegova veličina. Samo ona kombinacija proizvodnih faktora pri kojoj je visina profita pri datom ograničenju najveća moguća predstavlja optimalni izbor.

Pošto je ukupan profit jednak razlici ukupnog prihoda i ukupnih troškova, to se problem optimalnog izbora faktora proizvodnje može dvostruko tretirati (Meta, 2012, str. 165):

- kao problem minimiziranja ukupnih troškova za ostvarenje datog obima proizvodnje i
- kao problem maksimiziranja obima proizvodnje za dati nivo troškova.

SOLUCIJA MINIMALNIH TROŠKOVA

U neoklasičnoj teoriji preduzeće se identifikuje sa preduzetnikom koji je istovremeno i vlasnik preduzeća i njegov menadžer. Cilj preduzetnika je da svoje poteze podredi ostvarenju što veće razlike između ukupnog prihoda i ukupnih troškova, odnosno da ostvari maksimalni profit. Interesi preduzetnika su kompatibilni sa ciljevima preduzeća i nema apsolutno nikakvih razloga da budu u koliziji. Po ovoj teoriji preduzetnik je savršeno upoznat sa svim relevantnim aspektima svoga okruženja, odnosno pretpostavlja se da on poznaje svoju funkciju troškova, funkciju tražnje i proizvodnu funkciju (Nikolić, Malenović, Pokrajčić i Paunović, 2003, str. 375). U skladu sa tim on koristi inpute stvarajući na taj način output, pri čemu snosi troškove proizvodnje, čija je visina determinisana upotrebljenim količinama inputa i njihovim cenama. Kombinacije faktora proizvodnje za dobijanje datog nivoa outputa su brojne i svaka od njih ima uticaja na visinu profita. Pri konstantnoj prodajnoj ceni i datom outputu, svaka od kombinacija faktora koja rezultira datom količinom outputa nema uticaja na ukupan prihod, ali će i te kako uticati na iznos ukupnih troškova. Pošto ukupan profit predstavlja razliku ukupnog prihoda i ukupnih troškova, racionalni rezon nalaže da će preduzetnik birati onu kombinaciju inputa za ostvarenje datog nivoa outputa koja će rezultirati najmanjim iznosom ukupnih troškova u odnosu na druge raspoložive alternative. Ako se sa datom tehnologijom želi ostvariti određeni nivo outputa, onda se izbor optimalnog rešenja svodi na utvrđivanje količine upotrebe inputa rada i kapitala za ostvarenje datog outputa uz minimalne troškove. Preduzetnik želi da obim proizvodnje (x) koji je dat proizvodnom funkcijom Kob-Daglasovog tipa:

$$x = R^a K^b \tag{1}$$

ostvari sa najmanjim iznosom ukupnih troškova (UT)

$$UT = C_R R + C_K K \tag{2}$$

u kojoj R označava količinu rada, K količinu kapitala, a C_R i C_K cene inputa rada i kapitala. Pri rešavanju problema uslovljene minimizacije relacija (2) predstavlja funkciju cilja, a relacija (1) je ograničenje koje možemo prikazati i u obliku:

$$x - R^a K^b = 0$$

Ako obe strane gornjeg izraza pomnožimo koeficijentom λ dobićemo:

$$\lambda\left(x - R^a K^b\right) = 0 \tag{3}$$

Korišćenjem izraza (2) i (3) formiraćemo Lagranžeovu funkciju:

$$L = C_R R + C_K K + \lambda\left(x - R^a K^b\right)$$

Izvršićemo diferencijaciju ove funkcije kako bi smo dobili tri uslova prvog reda (Varijan, 2003, str. 315-317):

$$\partial L / \partial R = C_R - \lambda a R^{a-1} K^b = 0 \tag{4}$$

$$\partial L / \partial K = C_k - \lambda b R^a K^{b-1} = 0 \tag{5}$$

$$\partial L / \partial \lambda = x - R^a K^b = 0 \tag{6}$$

Množenjem prvog uslova sa R, drugog sa K dobijamo:

$$RC_R = \lambda a x \tag{7}$$

$$KC_k = \lambda b x \tag{8}$$

Rešavanjem jednačine (7) po R, a jednačine (8) po K dobijamo:

$$R = \lambda a x / C_R \tag{9}$$

$$K = \lambda b x / C_K \tag{10}$$

Zamenom za R i K iz relacija (9) i (10) u izraz (1) dobijamo:

$$x = \left(\frac{\lambda a x}{C_R}\right)^a \left(\frac{\lambda b x}{C_K}\right)^b$$

Ovu jednačinu možemo rešiti po λ i dobiti:

$$\lambda = \left(\frac{C_R}{a}\right)^{\left(\frac{a}{a+b}\right)} \left(\frac{C_K}{b}\right)^{\left(\frac{b}{a+b}\right)} x^{\left(\frac{1-a-b}{a+b}\right)} \tag{11}$$

Pri rešavanju problema uslovljene minimizacije λ pokazuje za koliko će se povećati ukupni troškovi (funkcija cilja) ako se output (ograničenje) poveća za jednu jedinicu. Za Kob-Daglasovu funkciju sa konstantnim prinosom na obim ($a + b = 1$) koeficijent λ ima vrednost

$$\lambda = \left(\frac{C_R}{a}\right)^{\left(\frac{a}{a+b}\right)} \left(\frac{C_K}{b}\right)^{\left(\frac{b}{a+b}\right)}$$

Ako iznos za λ iz jednačine (11) zamenimo u izraze (9) i (10) i rešimo po R i K dobićemo funkciju tražnje za faktorima proizvodnje:

$$R^* = \left(\frac{a}{b}\right)^{\left(\frac{b}{a+b}\right)} c_R^{\left(\frac{-b}{a+b}\right)} c_K^{\left(\frac{b}{a+b}\right)} x^{\left(\frac{1}{a+b}\right)} \qquad (12)$$

$$K^* = \left(\frac{a}{b}\right)^{\left(\frac{-a}{a+b}\right)} c_R^{\left(\frac{a}{a+b}\right)} c_K^{\left(\frac{-a}{a+b}\right)} x^{\left(\frac{1}{a+b}\right)} \qquad (13)$$

Minimalan iznos ukupnih troškova pri ovim kombinacijama *R* i *K* iznosi:

$$UT = c_r R^* + c_K K^*$$

odnosno:

$$UT = \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\left(\frac{b}{a+b}\right)} + \left(\frac{a}{b}\right)^{\left(\frac{-a}{a+b}\right)}\right] c_R^{\left(\frac{a}{a+b}\right)} c_K^{\left(\frac{b}{a+b}\right)} x^{\left(\frac{1}{a+b}\right)} \qquad (14)$$

Minimalni iznos ukupnih troškova ne zavisi samo od nivoa outputa (x) koji se želi ostvariti, nego i od cena inputa koji se koriste, kao što i gornja relacija na to ukazuje. Povećanje bilo kojeg od ovih faktora (x, c_R i c_K) uticaće na rast ukupnih troškova, kao što i smanjenje obima proizvodnje i cena proizvodnih inputa utiče na smanjenje ukupnih troškova.

ELASTIČNOST UKUPNIH TROŠKOVA

Za merenje uticaja promene obima proizvodnje, cene rada i cene kapitala na nivo ukupnih troškova može biti uspešno korišćen koncept elastičnosti ukupnih troškova. Postoji mogućnost izračunavanja ovog koeficijenta u odnosu na promenu bilo kojeg uticajnog faktora ponaosob (x, c_R i c_K) ili svih njih zajedno. Koeficijent elastičnosti ukupnih troškova u odnosu na promenu x, c_R ili c_K pokazuje za koliko procenata će se promeniti ukupni troškovi ako obim proizvodnje, cena rada ili cena kapitala budu promenjeni za 1%.

Koeficijent elastičnost ukupnih troškova u odnosu na obim proizvodnje se dobija iz odnosa relativne promene ukupnih troškova i relativne promene obima proizvodnje, odnosno:

$$ {}_{x}E_{UT} = \frac{\frac{\Delta UT}{UT}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x}{UT}\frac{\Delta UT}{\Delta x} $$

u kojoj UT označava minimalni iznos ukupnih troškova potreban za ostvarenje obima proizvodnje x, a ΔUT apsolutnu promenu u visini ukupnih troškova izazvanu promenom obima proizvodnje za Δx. Pri infinitezimalnim promenama u obimu proizvodnje, gornji izraz dobija oblik:

$$ {}_{x}E_{UT} = \frac{x}{UT}\frac{\partial UT}{\partial x} $$

gde $\partial UT / \partial x$ označava parcijalni izvod funkcije ukupnih troškova po argumentu x.

$$ {}_{x}E_{UT} = \frac{x\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\left(\frac{b}{a+b}\right)} + \left(\frac{a}{b}\right)^{\left(\frac{-a}{a+b}\right)}\right]\left(\frac{1}{a+b}\right)c_R^{\left(\frac{a}{a+b}\right)}c_K^{\left(\frac{b}{a+b}\right)}x^{\left(\frac{1-a-b}{a+b}\right)}}{\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\left(\frac{b}{a+b}\right)} + \left(\frac{a}{b}\right)^{\left(\frac{-a}{a+b}\right)}\right]c_R^{\left(\frac{a}{a+b}\right)}c_K^{\left(\frac{b}{a+b}\right)}x^{\left(\frac{1}{a+b}\right)}} $$

što nakon sređivanja daje:

$$ {}_{x}E_{UT} = \frac{1}{a+b} \tag{15} $$

Koeficijent elastičnosti ukupnih troškova u odnosu na obim proizvodnje kod Kob-Daglasove funkcije proizvodnje je konstantna veličina i numerički je jednak recipročnoj vrednosti zbira eksponenata *a* i *b*. Kob-Daglasova proizvodna funkcija sa opadajućim prinosima na obim ($a+b<1$) se karakteriše koeficijentom elastičnosti ukupnih troškova koji je veći od 1. Kob-Daglasova proizvodna funkcija sa rastućim prinosima na obim ($a+b>1$) ima vrednost ovog koeficijenta koji je manji od 1. Kob-Daglasova funkcija proizvodnje sa konstantnim prinosom na obim ($a+b=1$) ima jediničnu vrednost koeficijenta elastičnosti.

Elastičnost ukupnih troškova u odnosu na promenu cene rada $({}_{c_R}E_{UT})$ se dobija iz odnosa relastivne promene ukupnih troškova i relativne promene cene ovog inputa, odnosno:

$${}_{c_R}E_{UT} = \frac{\dfrac{\Delta UT}{UT}}{\dfrac{\Delta c_R}{c_R}} = \frac{c_R}{UT}\frac{\Delta UT}{\Delta c_R}$$

u kojoj ΔUT označava apsolutnu promenu u ukupnim troškovima izazvanu promenom cene rada za Δc_R. Pri infinitezimalnim promenama u ceni rada, gornji izraz dobija oblik:

$${}_{c_R}E_{UT} = \frac{c_R}{UT}\frac{\partial UT}{\partial c_R}$$

gde $\partial UT / \partial c_R$ označava parcijalni izvod funkcije ukupnih troškova po argumentu c_R.

$${}_{c_R}E_{UT} = \frac{c_R\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\left(\frac{b}{a+b}\right)} + \left(\frac{a}{b}\right)^{\left(\frac{-a}{a+b}\right)}\right]\left(\frac{a}{a+b}\right)c_R^{\left(\frac{-b}{a+b}\right)}c_K^{\left(\frac{b}{a+b}\right)}x^{\left(\frac{1}{a+b}\right)}}{\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\left(\frac{b}{a+b}\right)} + \left(\frac{a}{b}\right)^{\left(\frac{-a}{a+b}\right)}\right]c_R^{\left(\frac{a}{a+b}\right)}c_K^{\left(\frac{b}{a+b}\right)}x^{\left(\frac{1}{a+b}\right)}}$$

što nakon sređivanja daje:

$${}_{c_R}E_{UT} = \frac{a}{a+b} \tag{16}$$

Koeficijent elastičnosti ukupnih troškova u odnosu na promenu cene rada kod Kob-Daglasove funkcije proizvodnje je konstantna veličina. Vrednost ovog koeficijenta je uvek manja od jedinice, nezavisno od toga da li je u pitanju Kob-Daglasova proizvodna funkcija sa opadajućim, rastućim ili konstantnim prinosima na obim. Uvek kada se cena inputa rada promeni (poveća ili smanji) za 1%, pri datom obimu proizvodnje i konstantnoj ceni kapitala, ukupni troškovi će se promeniti (povećati ili smanjiti) za manje od 1%. Može se primetiti da će vrednost ovog koeficijenta biti jednaka a ako je u pitananju Kob-Daglasova funkcija proizvodnje sa konstantnim prinosom na obim.

Elastičnost ukupnih troškova u odnosu na promenu cene kapitala $({}_{c_K}E_{UT})$ se dobija iz odnosa relastivne promene ukupnih troškova i relativne promene cene ovog inputa, odnosno:

$$\frac{\frac{\Delta UT}{UT}}{\frac{\Delta c_K}{c_K}} = \frac{c_K}{UT}\frac{\Delta UT}{\Delta c_K}$$

u kojoj je ΔUT apsolutna promena u ukupnim troškovima izazvana promenom cene kapitala za Δc_K. Pri infinitezimalnim promenama u ceni kapitala, gornji izraz se transformiše u oblik:

$${}_{c_K}E_{UT} = \frac{c_K}{UT}\frac{\partial UT}{\partial c_K}$$

gde $\partial UT / \partial c_K$ označava parcijalni izvod funkcije ukupnih troškova po argumentu c_K.

$${}_{c_K}E_{UT} = \frac{c_K\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\left(\frac{b}{a+b}\right)} + \left(\frac{a}{b}\right)^{\left(\frac{-a}{a+b}\right)}\right]\left(\frac{b}{a+b}\right)c_R^{\left(\frac{a}{a+b}\right)}c_K^{\left(\frac{-a}{a+b}\right)}x^{\left(\frac{1}{a+b}\right)}}{\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\left(\frac{b}{a+b}\right)} + \left(\frac{a}{b}\right)^{\left(\frac{-a}{a+b}\right)}\right]c_R^{\left(\frac{a}{a+b}\right)}c_K^{\left(\frac{b}{a+b}\right)}x^{\left(\frac{1}{a+b}\right)}}$$

odnosno:

$${}_{c_K}E_{UT} = \frac{b}{a+b} \qquad (17)$$

Koeficijent elastičnosti ukupnih troškova u odnosu na promenu cene kapitala je za Kob-Daglasovu funkciju proizvodnje konstantna i veličina za sve nivoe cena ovog faktora i njegova vrednost je uvek manja od jedinice, nezavisno od toga da li je u pitanju proizvodna funkcija sa opadajućim, rastućim ili konstantnim prinosima na obim. Uvek kada se cena kapitala promeni (poveća ili smanji) za 1%, pri datom obimu proizvodnje i konstantnoj ceni rada, ukupni troškovi će se promeniti (povećati ili smanjiti) za procenat manji od 1%. Vrednost ovog koeficijenta će biti jednaka b ako je u pitanju funkcija proizvodnje Kob-Daglasovog tipa sa konstantnim prinosima na obim.

Pri nepromenjenom obimu proizvodnje, istovremeno povećanje cena oba inputa za 1% izaziva povećanje i ukupnih troškova za 1%, a istovremeno povećanje sva tri uticajna faktora (obima proizvodnje, cene radai cene kapitala) za 1% utiće na povećanje ukupnih troškova za:

$$E_{UT} = \left(\frac{1}{a+b} \right) + 1 \qquad (18)$$

Za Kob-Daglasovu funkciju sa konstantnim prinosom simultano povečanje sva tri faktora za 1% izaziva povećanje ukupnih troškova za 2%. Posmatrano iz jedne druge perspektive, za ovu proizvodnu funkciju važi pravilo da će svako udvostručenje cena varijabilnih inputa i obima proizvodnje rezultirati učetvorostručenjem iznosa ukupnih troškova. Ako se svi uticajni faktori povečaju za tri puta, ukupni troškovi će se povećati za devet puta.

SOLUCIJA MAKSIMALNE PROIZVODNJE

Racionalno ponašanje preduzetnika u dugom vremenskom periodu, kao što smo i naglasili, se ogleda u njegovoj težnji da minimizira ukupne troškove za dati nivo outputa ili da maksimizira output pri datom iznosu ukupnih troškova.

U drugom slučaju (uslovljena maksimizacija) preduzetnik želi maksimizirati funkciju:

$$x = R^a K^b \qquad (19)$$

uz ograničenje

$$UT = C_R R + C_K K \qquad (20)$$

Preduzetnik nabavlja inpute proizvodnje u određenim količinama i snosi troškove proizvodnje čija je visina determinisana upotrebljenim količinama inputa i njihovim cenama. U zavisnosti od cena inputa, preduzetnik je u mogućnosti da istim iznosom novca kupi različite količine inputa. Svaka od mogućih kombinacija kupovine inputa će rezultirati istim iznosom ukupnih troškova, ali i mogućnošću ostvarenja različitog nivoa proizvodnje. Kombinacije faktora proizvodnje sa datim iznosom ukupnih troškova mogu biti brojne i svaka od njih ima uticaja na visinu profita. Pri konstantnoj prodajnoj ceni i troškovima proizvodnje svaka od kombinacija faktora će preko obima proizvodnje imati uticaja na ukupan prihod. U ovakvim okolnostima, racionalni rezon nalaže da preduzetnik bira onu kombinaciju inputa pri datom nivou ukupnih troškova koja će rezultirati najvećom mogućom proizvodnjom u odnosu na sve druge raspoložive alternative.

Problem uslovljene maksimizacije ćemo rešiti primenom Lagranžeovih multiplikatora (Lagrangian multiplier). Lagranžeov multiplikator je konstanta čija se vrednost određuje kada se utvrde vrednosti nepoznatih članova jednačine koja se maksimizira ili minimizira. Broj Langranžeovih multiplikatora zavisi od broja ograničenja koja postoje pri maksimiziranju ili minimiziranju (Nikolić i sar., 2003, str.376-377). Uslovljenu maksimizaciju ćemo rešiti uvođenjem konstante λ. Ograničenje (20) ćemo izjednačiti sa nulom:

$$UT - C_R R - C_K K = 0$$

Zatim ćemo gornji izraz pomnožiti Lagranžeovim multiplikatorom λ:

$$\lambda\left(UT - C_R R - C_K K\right) = 0 \qquad (21)$$

Na osnovu relacija (19) i (21) formiraćemo Lagranžeovu funkciju:

$$L = R^a K^b + \lambda\left(UT - C_R R - C_K K\right) \qquad (22)$$

koju treba maksimizirati. Pri datim eksponentima a i b koji opisuju proizvodnu funkciju, datom iznosu ukupnih troškova i konstantnim cenama inputa, R, K i λ se javljaju kao veličine koje treba odrediti. Diferencijacijom Lagranžeove funkcije po R, K i λ dobijamo tri uslova prvog reda:

$$\partial L / \partial R = aR^{a-1}K^b - \lambda C_R = 0$$

$$\partial L / \partial K = bR^a K^{b-1} - \lambda C_K = 0$$

$$\partial L / \partial \lambda = UT - C_R R - C_K K = 0$$

odnosno:

$$aR^{a-1}K^{b} = \lambda C_R \qquad (23)$$

$$bR^{a}K^{b-1} = \lambda C_K \qquad (24)$$

$$UT = C_R R + C_K K \qquad (25)$$

Deljenjem jednačine (23) sa jednačinom (24) dobijamo:

$$\frac{aR^{a-1}K^{b}}{bR^{a}K^{b-1}} = \frac{C_R}{C_K}$$

što znaći da uslov maksimizacije prvog reda implicira da se maksimalni output ostvaruje pri onim količinama *R* i *K* pri kojima se odnosi parcijalnih izvoda proizvodne funkcije (marginalna produktivnost faktora) po *R* i *K* izjednačavaju sa odnosom cena inputa.

Ako jednačinu (23) pomnožimo sa *R,* a jednačinu (24) sa *K* dobičemo:

$$\lambda R C_R = aR^{a}K^{b} \qquad (26)$$

$$\lambda K C_K = bR^{a}K^{b} \qquad (27)$$

Sabiranjem jednačina (26) i (27) dobijamo

$$\lambda\left(C_R R + C_K K\right) = \left(a+b\right)R^{a}K^{b}$$

čijim ćemo rešavanjem po λ imati

$$\lambda = \frac{\left(a+b\right)}{UT}R^{a}K^{b} \qquad (28)$$

Zamenom gornjeg iznosa λ u izraz (26) i njegovim rešavanjem po *R* dobijamo:

$$R^{*} = \left(\frac{a}{a+b}\right)\frac{UT}{c_R}$$

a zamenom iznosa λ u izraz (27) dobijamo:

$$K^* = \left(\frac{b}{a+b}\right)\frac{UT}{c_K}$$

Ako gornje iznose za R^* i K^* zamenimo u izraz (28) dobijamo vrednost koeficijenta λ:

$$\lambda = \frac{(a+b)}{UT}\left[\left(\frac{a}{a+b}\right)\frac{UT}{c_R}\right]^a \left[\left(\frac{b}{a+b}\right)\frac{UT}{c_K}\right]^b$$

što nakon sređivanja daje:

$$\lambda = \left(\frac{a}{c_R}\right)^a \left(\frac{b}{c_K}\right)^b (a+b)^{(1-a-b)}\, UT^{(a+b-1)} \qquad (29)$$

Pri rešavanju problema uslovljene maksimizacije, λ u izrazu (29) pokazuje za koliko će se fizičkih jedinica povećati ili smanjiti obim proizvodnje ako se ukupni troškovi preduzeća povećaju ili smanje za jednu novčanu jedinicu. U slučaju Kob-Daglasove funkcije koja se karakteriše konstantnim prinosom na obim ($a+b=1$) koeficijent λ će imati vrednost:

$$\lambda = \left(\frac{a}{c_R}\right)^a \left(\frac{b}{c_K}\right)^b$$

Zamenom R^* i K^* iz jednačina (16) i (17) u funkciju cilja:

$$x = R^a K^b$$

dobijamo (Varijan, 2003, str.172-173):

$$x = \left[\left(\frac{a}{a+b}\right)\frac{UT}{c_R}\right]^a \left[\left(\frac{b}{a+b}\right)\frac{UT}{c_K}\right]^b$$

što nakon sređivanja daje:

$$x = \left(\frac{a}{c_R}\right)^a \left(\frac{b}{c_K}\right)^b \left(\frac{UT}{a+b}\right)^{(a+b)} \qquad (30)$$

Izraz (30) pokazuje da maksimalno moguća proizvodnja ne zavisi samo od nivoa ukupnih troškova, nego i od cena inputa koji se koriste u proizvodnom procesu. Promenom bilo koje od ovih veličina maksimalno mogući output se menja, ali za razliku od zavisnosti nivoa outouta od promene u troškovima koja je istosmerna, zavisnost promene cena inputa na promenu nivoa outputa je suprotnosmerna.

ELASTIČNOST PROIZVODNJE

Za ekonomsku analizu je od posebnog značaja da se utvrdi ne samo za koliko će se fizičkih jedinica promeniti output usled promene ukupnih troškova za jednu jedinicu (vrednost koeficijenta λ), već i za koliko će se procenata promeniti output ako se ukupni troškovi promene (povećaju ili smanje) za 1%. Koeficijent koji meri odnos procentualne promene outputa i procentualne promene ukupnih troškova nazvaćemo elastičnošću proizvodnje u odnosu na ukupne troškove $({}_{UT}E_x)$. Za njegovo izjednačavanje koristimo obrazac:

$${}_{UT}E_x = \frac{\frac{\Delta x}{x}100}{\frac{\Delta UT}{UT}100}$$

koji se može preurediti i prikazati u obliku:

$${}_{R}E_x = \frac{UT}{x}\frac{\Delta x}{\Delta UT}$$

u kojoj Δx označava apsolutnu promenu u obimu proizvodnje izazvanu promenom u nivou ukupnih troškova za ΔUT. Ako su u pitanju vrlo male promene u visini ukupnih troškova (ΔUT→*0)* gornji izraz se može napisati:

$${}_{UT}E_x = \frac{UT}{x}\frac{\partial x}{\partial UT}$$

gde $\partial x / \partial UT$ označava parcijalni izvod funkcije ukupne proizvodnje po argumentu UT.

$${}_{UT}E_x = \frac{UT}{\left(\frac{a}{c_R}\right)^a\left(\frac{b}{c_K}\right)^b\left(\frac{UT}{a+b}\right)^{(a+b)}}\left(a+b\right)\left(\frac{a}{c_R}\right)^a\left(\frac{b}{c_K}\right)^b\frac{UT^{(a+b-1)}}{(a+b)^{(a+b)}}$$

što nakon sređivanja daje:

$$ {}_{UT}E_x = a + b \tag{31} $$

Koeficijent elastičnosti proizvodnje u odnosu na promenu ukupnih troškova je kod Kob-Daglasove funkcije konstantna veličina pri svim nivoima troškova i jednak je zbiru eksponenata *a* i *b*. Kob-Daglasova funkcija sa opadajućim prinosima na obim ($a + b < 1$) se karakteriše koeficijentom elastičnosti koji je manji od jedinice. Kob-Daglasova proizvodna funkcija sa rastućim prinosima na obim ($a + b > 1$) ima vrednost ovog koeficijenta koji je veći od jedinice. Kob-Daglasova funkcija proizvodnje sa konstantnim prinosom na obim ($a + b = 1$) se karakteriše jediničnim koeficijentom elastičnosti.

Elastičnost proizvodnje u odnosu na promenu cene rada (${}_{c_R}E_x$) se dobija iz odnosa relativne promene obima proizvodnje i relativne promene cene ovog inputa:

$$ {}_{c_R}E_x = \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta c_R}{c_R}} = \frac{c_R}{x}\frac{\Delta x}{\Delta c_R} $$

u kojoj Δx označava apsolutnu promenu u obimu proizvodnje izazvanu promenom u ceni rada za Δc_R. Pri infinitezimalnim promenama u c_R, gornji izraz se transformiše u oblik:

$$ {}_{c_R}E_x = \frac{c_R}{x}\frac{\partial x}{\partial c_R} $$

gde $\partial x / \partial c_R$ označava parcijalni izvod funkcije ukupne proizvodnje po argumentu c_R.

$$ {}_{c_R}E_x = \frac{c_R}{\left(\frac{a}{c_R}\right)^a \left(\frac{b}{c_K}\right)^b \left(\frac{UT}{a+b}\right)^{(a+b)}} (-a)\frac{a^a}{c_R^{(a+1)}}\left(\frac{b}{c_K}\right)^b \left(\frac{UT}{a+b}\right)^{(a+b)} $$

što nakon sređivanja daje:

$$ {}_{c_R}E_x = -a \tag{32} $$

Koeficijent elastičnosti proizvodnje u odnosu na promenu cene faktora *R* je kod Kob-Daglasove funkcije proizvodnje konstantna veličina pri svim nivoima cena ovog faktora. Njegova vrednost je negativna, nezavisno od toga da li je u pitanju Kob-Daglasova funkcija sa opadajućim, rastućim ili konstantnim prinosima. Uvek kada se cena inputa rada promeni (poveća ili smanji) za 1%, pri datom nivou ukupnih troškova i konstantnoj ceni kapitala obim proizvodnje će se promeniti (smanjiti ili povečati) za *a*%.

Elastičnost ukupnih troškova u odnosu na promenu cene kapitala $({}_{C_K}E_x)$ se dobija iz odnosa relativne promene obima proizvodnje i relativne promene cene ovog proizvodnog faktora, odnosno

$$ {}_{C_K}E_x = \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta c_K}{c_K}} = \frac{c_K}{x}\frac{\Delta x}{\Delta c_K} $$

u kojoj Δx označava apsolutnu promenu u obimu proizvodnje izazvanu promenom u ceni kapitala za Δc_K. Pri vrlo malim promenama u ceni *K*, gornji izraz se transformiše u oblik:

$$ {}_{C_K}E_x = \frac{c_K}{x}\frac{\partial x}{\partial c_K} $$

gde $\partial x / \partial c_K$ označava parcijalni izvod funkcije ukupne proizvodnje po argumentu c_K.

$$ {}_{C_K}E_x = \frac{c_K}{\left(\frac{a}{c_R}\right)^a \left(\frac{b}{c_K}\right)^b \left(\frac{UT}{a+b}\right)^{(a+b)}} (-b)\left(\frac{a}{c_R}\right)^a \frac{b^b}{c_K^{(b+1)}}\left(\frac{UT}{a+b}\right)^{(a+b)} $$

što nakon sređivanja daje:

$$ {}_{C_K}E_x = -b \tag{33} $$

Koeficijent elastičnosti proizvodnje u odnosu na promenu cene inputa *K* je kod Kob-Daglasove funkcije konstantna veličina za sve nivoe cena ovog inputa. Njegova vrednost je negativna, nezavisno od toga da li je u pitanju proizvodna funkcija sa opadajućim prinosom na obim, sa rastućim prinosom na obim ili konstantnim prinosom na obim. Uvek kada se cena inputa kapitala promeni (poveća ili smanji) za 1%, pri datoj visini ukupnih troškova i konstantnoj ceni rada, obim proizvodnje će se promeniti (smanjiti ili povečati) za b%.

Pri datom iznosu ukpnih troškova, simultano povećanje cena varijabilnih inputa za 1% izaziva smanjenje u obimu proizvodnje za ($a+b$)%, a istovremeno povećanje sva tri uticajna faktora (ukupnih troškova, cene faktora R i cene faktora K) za 1% neće izazvati nikakvu promenu u obimu proizvodnje

ZAKLJUČAK

Kob-Daglasove tehnologije se mogu karakterisati rastućim, konstantnim i opadajućin prinosima. U sva tri slučaja funkcija minimalnih ukupnih troškova zavisi od cena faktora proizvodnje i nivoa outputa. Povećanjem bilo kojeg od ovih faktora ukupni troškovi preduzeća se povećavaju. Pri nepromenjenim cenama rada i kapitala, povećanjem obima proizvodnje ukupni troškovi će pokazivati progresivni, proporcionalni ili degresivni razvojni tok u zavisnosti od toga da li je u pitanju funkcija proizvodnje sa rastućim, konstantnim ili opadajućim prinosima na obim. Ova činjenica implicira da Kob-Daglasova funkcija sa rastućim prinosima mora imati koeficijent elastičnosti koji je veći od jedinice, Kob-Daglasova funkcija sa konstantnim prinosima jedinični koeficijent elastičnosti, a Kob-Daglasova funkcija sa opadajućim prinosima koeficijent elastičnosti koji je manji od jedinice. Vrlo značajna konstatacija u vezi sa analizom problema uslovljene optimizacije je da simultana promena u cenama oba proizvodna inputa za određeni procenat, pri konstantnom obimu proizvodnje, izaziva povećanje u ukupnim troškovima za isti procenat.

Rešavanjem problema uslovljene maksimizacije dobija se funkcija koja pokazuje maksimalnu proizvodnju pri datim ukupnim troškovima i cenama faktora proizvodnje. Da li će preduzeće biti u mogućnosti da realizuje manji ili veći obim proizvodnje dominantno zavisi od iznosa novca kojim želi kupiti faktore proizvodnje. Sa povećanjem ukupnih troškova, pri konstantnim cenama inputa, funkcija maksimalno mogućeg outputa će pokazivati progresivan (Kob-Daglasova funkcija sa rastućim prinosima na obim), proporcionalan (Kob-Daglasova funkcija sa konstantnim prinosima na obim) ili degresivan (Kob-Daglasova funkcija sa opadajućim prinosima na obim) razvojni tok. U odnosu na vrstu prinosa na obim koji Kob-Daglasova tehnologija ostvaruje vrednost koeficijenta elastičnosti proizvodnje u odnosu na ukupne troškove je veći, jednak ili manji od jedinice. Analizom elastičnosti proizvodnje u odnosu na cene proizvodnih inputa, došli smo do jedne vrlo korisne konstatacije koja ukazuje na to da simultano povećanje cena oba proizvodna inputa za 1% (pri konstantnom iznosu ukupnih troškova) izaziva smanjenje u obimu proizvodnje za isti procenat za koji će se povećati proizvodnja (pri konstantnim cenama inputa) ako ukupni troškovi budu povećani za 1%. Drugim rečima, istovremenim povećanjem ili smanjenjem cena proizvodnih inputa i ukupnih troškova za isti procenat, obim proizvodnje se neće promeniti.

PROBLEM OF CONDITIONED OPTIMIZATION IN THE NEOCLASSICAL THEORY OF THE FIRM

Meta Mehmed

Abstract: *In a long period of time all production factors are variable, unlike the short period in which some of them have a fixed character. Although real production processes use many inputs, considering a production case with two variable inputs greatly simplifies the analysis of production over a long period of time. For the economic analysis of production that is characterized by variability of all production factors, an interesting decision is the one concerning the choice of a combination of two inputs, the usage of which will help achieve the maximum possible production or else the given volume of production will be achieved with the minimum amount of total costs.*

Starting from very simple algebraic functions (also known as Kob-Douglas production function) in this paper we will consider the problem of optimization, or the choice of using a combination of production inputs, so that with a given level of total costs, and given price of production inputs, we can achieve the maximum possible production (problem of conditioned maximization) and the choice of using a combination of production inputs at constant prices of inputs which leads to a given level of output with minimal production costs (problem of conditioned minimization).

Keywords: conditioned *maximization / conditioned minimization / Lagrange equations / Kob-Douglas function / elasticity / cost of production inputs / returns of scale*

LITERATURA

1. Babić, M. (1997). *Mikroekonomska analiza* (4. izd.), Zagreb, Mate
2. Babić, S., Milovanović, M. (1997). *Teorije cena*, Beograd, Ekonomski fakultet
3. Bakalar, J. (1997). *Mikroekonomija*, Mostar - Sarajevo, HKD Napredak

4. Cerović B., Stojanović, B. (1995). *Teorija proizvodnje*, Beograd, Ekonomski fakultet
5. Koutsoyiannis, A. (1996). *Moderna mikroekonomika*, Zagreb, Mate
6. Mankiw, G. (2005). *Osnovi Ekonomije*, Zagreb, Mate, Zagreb
7. Meta, M. (2012). *Mikroekonomska analiza*, Novi Pazar, Internacionalni Univerzitet u Novom Pazaru
8. Milenović, B. (1998). *Mikroekonomija (teorija i primena),* Beograd-Niš, Fakultet za trgovinu i bankarstvo i Europrojekat
9. Nikolić, M., Malenović, N., Pokrajčić, D., Paunović, B. (2003). *Ekonomika preduzeća*, Beograd, Ekonomski fakultet
10. Samuelson, A. P., Nordhaus, D. V. (2000). *Ekonomija* (15. izd.), Zagreb, Mate
11. Varijan, R. H. (2003). *Mikroekonomija (moderan pristup)*, Beograd, Ekonomski fakultet