СИНТЕЗЕ 2013, бр. 3, стр. 23 -31.
UDK 373.211.24
ID: 199346444

ОСНОВНЕ КОМБИНАТОРНЕ КОНФИГУРАЦИЈЕ У ОБРАЗОВАЊУ ВАСПИТАЧА

Милан В. Живановић[1], *Миленко Т. Пикула*[2]

Сажетак: У раду су презентовани аргументи за потребу комбинаторног образовања васпитача. Са тим циљем је предложен минималан садржај који би по мишљењу аутора то образовање требало да обухвати. Кроз примере везане за практичне ситације покушано је да се ти садржаји на разумљив и интересантан начин приближе и читаоцима којима је математика стварала потешкоће у школовању.

Кључне речи: Комбинаторне конфигурације, варијације, пермутације, комбинације, образовање васпитача

УВОД

Најзначајнија метода учења у предшколском образовању је метода учења кроз игру. Васпитач бира и организује игре за одговарајући узраст и конкретну проблематику те учествује у њој, по потреби, као саиграч, арбитар или коректор. Због тога он мора добро да познаје: карактеристике појединих фаза интелектуалног развоја предшколске деце, индивидуалне способности сваког детета, њихове сколности у друштвеним односима, улогу појединих игара на развоју математичких појмова, али и основне комбинаторне конфигурације које имају примену у организацији различитих видова игара.

Последња констатација поготово долази до изражаја у организовању игара које имају такмичарски карактер било да су оне индивидуалног или тимског карактера. Сама потреба се огледа како у

[1] mzivanovic@vaspks.edu.rs
Висока школа струковних студија за образовање васпитача, Крушевац
[2] Филозовски факултет, Пале

прављењу група (тимова), тако и у избору типа такмичења у зависности од броја деце и њихових различитих способности, те у зависности од временских, просторних и техничких услова. Поред тога, деца предшколског узраста могу решавати неке основне комбинаторне проблеме на скуповима са малим бројем елемената, што је још један од разлога да васпитачи треба да буду упознати са основама комбинаторике.

Сматрамо, због тога, да је изучавање основних комбинаторних конфигурација неоправдано искључено из процеса образовања васпитача. Стога би било пожељно да се средњошколске основе о комбинаторним конфигурацијама обнове у излагању теорије о математичко-дидактичким играма. У тексту који следи су дати основни теоријски садржаји и примери који се могу искористити у ту сврху.

2. КОМБИНАТОРНЕ КОНФИГУРАЦИЈЕ

Подсетимо се најпре неких основних чињеница о скуповима. Ограничимо се на непразне коначне скупове, њихове подскупове и различите распореде њихових елемената. Како скупови могу садржати као елементе различите објекте, у теоријском прегледу ћемо се ограничити на коначне подскупове скупа природних бројева, који уобичајено обележавамо словом N.

Дефиниција 1**.** Нека су дати непразни коначни скупови A, B. Декартов производ та два скупа, у ознаци $A \times B$, је скуп уређених парова, код којих је први члан пара из првог скупа, а други члан пара из другог скупа, или формулом $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$.

Пример 1. Дати су скупови $A = \{1,2,3,4\}$ и $B = \{2,5,7\}$. Одредити скупове $A \times B$ и $B \times A$.

Решење:

$$A \times B = \{(1,2),(1,5),(1,7),(2,2),(2,5),(2,7),(3,2),(3,5),(3,7),(4,2),(4,5),(4,7)\};$$

$$B \times A = \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(7,1),(7,2),(7,3),(7,4)\}.$$

Уочавамо да је $A \times B \neq B \times A$ тј. да операција Декартовог производа није комутативна. По аналогији са дефиницијом степена реалног броја уводи се и степен скупа. Тако је $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A \times A$ и тако даље. Договоримо се још да са $k(X)$ означимо број елемената скупа X .

Пример 2. Одредити број елемената скупова из примера 1.

Решење: Пребројавањем елемената добијамо $k(A)=4$, $k(B)=3$, $k(A\times B)=12$ и $k(B\times A)=12$.

Без доказа наводимо тзв. **теорему производа**:

Нека су A, B *непразни скупови такви да је* $k(A)=a$ *и* $k(B)=b$, *тада је* $k(A\times B)=a\cdot b$.

Као последицу овог тврђења имамо да је $k(A^2)=a^2$, $k(A^3)=a^3$ и уопште $k(A^n)=a^n$.

Пример 3. У једној предшколској групи је 12 девојчица и 9 дечака. Васпитач треба да изабере једну девојчицу и једног дечака за водитеље програма на дечијој приредби. На колико начина он може направити тражени избор?

Решење: Применом теореме производа израчунавамо да је број могућих парова девојчица-дечак према бројности скупова једнак $12\cdot 9=108$.

Пример 4. Васпитач треба да организује дневно три игре из методике развијања почетних математичких појмова. Те активности треба да буду на усвајању геометријских појмова, формирању појмова природних бројева и мерењу физичких величина. За прву област има на располоагању 7, за другу 9 и трећу 6 различитих дидактичких средстава. Колико дана он може организовати овакве активности, ако дневно користи по једно дидактичко средство за одређену математичку област, а да не понови сет од три иста дидактичка средства у два различита дана?

Решење: Као и у претходном примеру користимо теорему производа па је број могућих дана за организовање активности према датим условима једнак $7\cdot 9\cdot 6=378$.

Дефиниција 2: Нека је дат коначан скуп $A=\{1,2,3,\dots,n\}$, $n\in N$; тада произвољан елемент скупа A^k зовемо k-том варијацијом скупа A, или варијацијом од n елемената k-те класе.

Другим речима варијација неког скупа је сваки распоред његових елемената (не обавезно свих) на произвољан број места.

Пример 5. Исписати све варијације скупа $A=\{1,2,3,4\}$ друге класе и супа $B=\{1,2\}$ треће класе.

Решење: Варијације скупа A друге класе су:

$(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)$

Варијације скупа B треће класе су:

$(1,1,1),(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1),(1,2,2),(2,1,2),(2,2,1),(2,2,2)$.

Договоримо се да убудуће варијације исписујемо без заграда и унутрашњих зареза. То јест $(1,2,2)=122$. Пребројавањем добијамо да је број варијација четворочланог скупа друге класе једнак 16, а број варијација двочланог скупа треће класе једнак 8. Ове варијације називамо варијацијама са понављањем, јер се елементи у појединачним варијацијама могу понављати. Број варијација са понављањем од n елемената k-те класе обележаваћемо са $\overline{V}_n^k$. У складу са тим у претходном примеру смо, исписивањем и пребројавањем, добили да је $\overline{V}_4^2=16$ и $\overline{V}_2^3=8$. Општа формула за израчунавање свих варијација са понављањњем од n елемената k-те класе је последица теореме производа и гласи:

$$\overline{V}_n^k=n^k .$$

Пример 6. Перица са 9 другара треба да учествује на три такмичења. Колико различитих пласмана он може реализовати укупно на сва три такмичења?

Решење: Перица може, у једном такмичењу, заузети неко од $n=10$ места. Те пласмане распоређујемо на $k=3$ такмичења. У различитим такмичењима он може освојити исто место, па је број свих његових пласмана једнак једнак броју варијација са понављањем од 10 елемената треће класе $\overline{V}_{10}^3=10^3=1000$.

Варијације код којих се сваки елеменат може распоредити на највише једно место назвивамо варијације без понављања.

Пример 7. Иписати све варијације без понављања под условима задатка 5.

Решење: Ако из скупа свих варијација избацимо варијације у којима се елементи понављају добијамо варијације скупа A друге класе без понављања: 12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43. Не постоје варијације скупа B треће класе без понављања јер је број места за располоређивање већи од броја елемената које распоређујемо.

Број варијација од n елемената k-те класе са понављањем обележаваћемо са V_n^k. У том смислу је $V_4^2 = 12$, а V_2^3 није дефинисано. Код варијација без понављања број кандидата за постављање на прво место је једнак броју елемената скупа чије елементе распоређујемо. За свако следеће место се број кандидата смањује за 1. Применом ове чињенице и правила множења добијамо формулу за израчунавање броја свих варијације без понављања од n елемената k-те класе:

$$V_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1).$$

Пример 8. Међу четворо деце једне групе омиљене су 3 различите играчке, од којих се тачно једном може играти само једно дете у истом временском интервалу. На колико начина васпитач може искористити играчке у тој групи тако да се у различитим временским интервалима не понови иста тројка деце за истим играчкама?

Решење: Очигледно је да из скупа од $n = 4$ деце бирамо $k = 3$ детета за по једну од 3 играчке. При томе се два детета не могу истовремено играти са једном играчком. Закључујемо да је решење проблема једнако броју варијација без понављања од 4 елемената, 3-те класе тј. $V_4^3 = 4\cdot(4-1)\cdot(4-2) = 4\cdot 3\cdot 2 = 24$.

Варијације без понављања у којима је број елемената једнак реду класе ($n = k$) називамо пермутацијама. Пермутације су дакле различити распореди свих елемената неког скупа.

Пример 9. Исписати све пермутације скупа $A = \{1,2,3\}$.

Решење: Све пермутације скупа A су: 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Број свих пермутација скупа од n елемената означаваћемо са P_n. Према томе број пермутација у претходном примеру је $P_3 = 6$. Уопште важи следећа формула:

$$P_n = V_n^n = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

или скраћено

$$P_n = n!$$

Израз на десној страни формуле читамо „ен факторијел“ и он представља производ свих природних бројева мањих или једнаких од n. Тако је $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Код великог броја игара је редослед играча у извођењу потеза битан. Рецимо квиз у којем играчи бирају питања која су видљива на самом почетку такмичења. Без обзира колико се организатор игре трудио да питања буду приближно исте тежине, у таквим играма предност је на страни играча који раније бирају питање. Ради изједначавања услова за фер такмичење потребно је игру поновити више пута са различитим распоредима играча.

Пример 10. Четворо деце играју квиз знања тако да свако дете бира једно од 4 питања са видљиве листе. На колико различитих начина можемо припремити распоред деце за избор питања у овој игри?

Решење: Свком од $n = 4$ деце придружујемо један од $k = 4$ pеспореда, дакле треба израчути број пермутаціа од 4 елемента. Решење је $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ начина.

Дефиниција: Произвољан подскуп k елемената скупа $A = \{1,2,3,\ldots,n\},\ n \in N,\ k \leq n$ називамо k-том комбинацијом скупа A, или комбинацијом од n елемената k-те класе.

Пример 11. Исписати све комбинације скупа $A = \{1,2,3,4,5\}$ треће класе.

Решење: Тражене коминације су: $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,2,5\}$, $\{1,3,4\}$, $\{1,3,5\}$, $\{1,4,5\}$, $\{2,3,4\}$, $\{2,3,5\}$, $\{2,4,5\}$, $\{3,4,5\}$.

Договорићемо се да убудуће комбинације пишемо без спољних заграда и унутрашњих зареза. Број свих комбинација од n елемената k-те класе обележаваћемо са C_k^n. На основу претходног задатка закључујемо да је $C_3^5 = 10$.

У скупу свих варијација од n елемената k-те класе, постоји тачно $k!$ пермутација сваког подскупа од k елемената, па закључујемо да је:

$$C_k^n = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

Број C_k^n се често обележава са $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ што читамо „ен над ка“, а зовемо и биномним коефицијентом.

Пример 12. Из скупа од 12 играчака треба изабрати четири играчке за једну активност. На колико начина васпитач може направити избор играчака по овом услову?

Решење: Из скупа од $n=12$ играчака треба изабрати $k=4$ играчке. Пошто редослед избора и употребе играчака није битан ради се о комбинацијама.

Решење проблема је $C_4^{12}=\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix}=\dfrac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=495$ различитих избора сетова играчака.

Проблеми се усложњавају ако при избору и распоређивању елемената произвољног скупа имамо додатна ограничења. У таквим ситуацијама из скупа одређених комбинаторних елемената треба изабрати оне које задовољавају постављене услове или избацити оне које те услове не задовољвају. Такође у неким примерима је потребно вршити избор из посматраног скупа по два и више критеријума, а затим правити нову комбинаторну конфигурацију са тако направљеним изборима.

Пример 13. Колико подскупова има скуп $A=\{1,2,3,4\}$?

Решење: Одредићемо подскупове скупа *A* према броју њихових елемената. Без елемената је празан скуп који је подскуп сваког скупа, дакле $C_0^4=1$. Са једним елементом има $C_1^4=\dfrac{4}{1}=4$ подскупа, са два елемента је $C_2^4=6$ подскупова, са три $C_3^4=4$ подскупа. Такође скупа А је сам себи подскуп, па је $C_4^4=1$. Дакле, укупан број подскупова датог скупа једнак је $1+4+6+4+1=16$ подскупова.

Пример 14. Игра се састоји из 5 сукцесивних операција (као штафета). Сваку операцију извршава различито дете из петочлане групе. Ако су у групи Бранко и Ацо са још три друга, на колико начина васпитач може распоредити чланове те групе за игру ако: а) Бранко треба да наступи први, б) Бранко треба да учествује непосредно иза Аце?

Решење: а) Ако Бранко наступа први четири преостала детета распоређујемо на 4 преостала места, тако да је број могућих распореда једнак $P_4 = 4! = 24$.

б) Ако је Бранко непосредно иза Аце, тада они могу наступити под једним од следећих редних бројева: први и други, други и трећи, трећи и четврти и на крају четврти и пети. Укупно 4 различита случаја. При томе у сваком од ових случајева преостало троје деце распоређујемо на три упражњена места, те је број тих распореда једнак $P_3 = 3! = 6$. Сада за укупан број свих распореда по услову задатка користимо теорему производа и добијамо тражени одговор $4 \cdot 6 = 24$ распореда.

Пример 15. Из групе од 12 девојчица и 8 дечака треба изабрати два дечака и две девојчице за огледну активност. На колико начина је могуће извршити овај избор?

Решење: У избору девојчица и дечака није битан редослед избора, што значи да правимо двочлане подскупове скупа девојчица и скупа дечака. Закључујемо да је број могућих избора девојчица једнак $C_2^{12} = \dfrac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = 66$ а број избора дечака $C_2^8 = 28$. Како сваком пару девојчица можемо придружити произвољан пар изабраних дечака укупан број свих могућих избора једнак је $66 \cdot 28 = 1848$.

Пример 16. Сања, Ива, Марко и Немања су у групи са још 16 деце. Васпитач треба да подели децу у 4 групе по петоро деце. На колико начина он може извршити поделу ако Сања, Ива, Марко и Немања: а) треба да буду у истој групи, б) треба да буду у различитим групама?

Решење: Редослед при избору деце у групе није битан тако да се ради о комбинацијама.

а) Ако наведена деце треба да буду у истој групи ми ћемо прво групе правити од преостале деце. Тако је број начина формирања прве групе једнак $C_5^{16} = 4368$. За другу групу је преостало 11 деце па је број начина њеног формирања једнак $C_5^{11} = 462$. Слично, трећу групу је могуће формирати на $C_5^6 = 6$. Преостало је једно дете које уврстимо у четврту групу заједно са Сањом, Ивом, Марком и Немањом на јединствен начин. Број свих могућих група направљених по задатом критеријуму је $4368 \cdot 462 \cdot 6 \cdot 1 = 12108096$.

б) У другом случају бирамо по четворо од шеснаесторо деце и прикључујемо их по једном од именованих детета. Број начина избора 16 деце у групе по 4 детета једнако је $C_4^{16} \cdot C_4^{12} \cdot C_4^{8} \cdot C_4^{4} = 1820 \cdot 495 \cdot 70 \cdot 1 = 63063000$. У сваку од 4 тако формиране групе распоређујемо Сању, Иву, Марка и Немању, а то је могуће извести на $P_4 = 24$ начина. Број свих различитих начина формирања група под задатим условима једнак је $63063000 \cdot 24 = 1513512000$.

Напомињемо да се већина примера из текста може решити и на друге начине. Те поступке препуштамо читаоцима заинтересованим за ову тематику.

ЛИТЕРАТУРА

Младеновић, П. (2001). Комбинаторика, ДМС, Београд

Тошић, Р. (1999). Комбинаторика, ПМФ, Нови Сад

BASIC COMBNATORIAL CONFIGURATIONS IN PRESCHOOL TEACHER EDUCATION

Milan Živanović Ph.D., *Milenko Pikula Ph.D*

Summary: The paper presents arguments for the need for combinatorial education of preschool teachers. To this effect, the author presents the minimal content which such training should cover in his opinion. Through examples related to practical situations, the author seeks to bring this matter closer to the readers who have had difficulties concerning mathematics during school.

Key terms: Combinatorial configurations, variations, permutations, combinations, preschool teacher training