ЗБОРНИК РАДОВА
Педагошки факултет у Ужицу
Година 22 • Број 21 • Децембар 2019
ISSN 2560-550X

УДК 37.016:51-021.64
Изворни научни чланак • 207–226
Примљен: 14.6.2019.
Прихваћен: 18.8.2019.

Мика Ракоњац[*]
Јасмина Милинковић[*]
Универзитет у Београду, Учитељски факултет

УТИЦАЈ ПРИМЕНЕ РАЗЛИЧИТИХ РЕПРЕЗЕНТАЦИЈА ПОЈМОВА И ПРОЦЕДУРА НА КОНЦЕПТУАЛНО РАЗУМЕВАЊЕ

Апстракт: Теоријско утемељење концептуалног насупрот процедуралном математичком знању основа јесу истраживања о коме се извештава у овом раду. Циљ истраживања је да се испита ефекат експерименталног програма заснованог на успостављању релација између различитих репрезентација појмова и процедура на развој концептуалног разумевања и на успешност у решавању проблема у областима: скуп природних бројева и геометријске фигуре и тела. Током истраживања спроведен је педагошки експеримент са паралелним групама на узорку од 60 ученика четвртог разреда основне школе. Ефикасност увођења експерименталног фактора разматрана је: 1) квалитативном анализом одговора ученика (дескриптори: процедурално разумевање, концептуално разумевање); 2) статистичком анализом квантитативних података базираним на ученичким одговорима у завршном тесту. Резултати указују на то да примена различитих репрезентација појма у настави представља вид ефикасне подршке развоју концептуалног разумевања и успешности у решавању математичких проблема.

Кључне речи: *репрезентација, концептуално разумевање, процедурално разумевање.*

УВОД

Проучавање аспеката концептуалног и процедуралног разумевања у математици већ дуже време је у фокусу истраживача математичког образовања (Carpenter & Lehrer, 1999; Hiebert & Carpenter, 1992; Skemp, 1976; Stylianides & Stylianides, 2007). Концептуално разумевање математичких појмова обухвата познавање чињеница и метода које су интегрисане у функционално разумевање математичких идеја које омогућавају препознавање или коришћење идеја у различитим контекстима. Оно обухвата и познавање релација између разли-

[*] mika.rakonjac@gmail.com
[*] jasmina.milinkovic@uf.bg.ac.rs

читих представа (репрезентација) појма, а описује се различитим когнитивним конструктима као што су модели, хијерархијска структура и семантичке мреже (Milinković, 2015). Процедурално знање јесте познавање корака које је потребно проћи у циљу реализације неког математичког поступка (процедуре). Ови поступци описују се конструктима као што су вештине, стратегије и др. Више истраживача бавило се разликама између концептуалног и процедуралног знања посебно с обзиром на меморију, језик, узрочно-последично резоновање и друго (Byrnes & Wasik, 1991). Међутим, када се говори о математичком знању, често се мисли на повезане концептуалне и процедуралне садржаје, укључујући алгоритме решавања проблема и хеуристику. Са аспекта постављених циљева образовања настава математике треба да прошири погледе ученика ван примене правила и процедура и да им омогући изградњу концептуалних структура које примењује у одговарајућим ситуацијама. Концептуално разумевање постиже се приказивањем концепта у различитим математичким структурама ослањајући се на релевантна семиотичка средства (геометријска, алгебарска, нумеричка) (Hiebert & Lefevre, 1986). У том смислу, методички приступ увођења математичких појмова и презентовања њихових међусобних веза, у овом раду, заснива се на индивидуалном ученичком истраживању погодних дидактички припремљених ситуација, које дају значење успостављању веза између математичких процеса и појмова применом четири приказа математичких објеката – вербалног, нумеричког, геометријског и симболичког. Ефекти примене различитих представа уочени су у резултатима учења и односе се на разумевање алгебарских и геометријских појмова (релација, дужина, обим, површина).

ТЕОРИЈСКЕ ОСНОВЕ

Иако примена алгебарских процедура води до тачног одговора, она се ослања на инструментално (процедурално) разумевање. Међутим, један од аспеката резултата учења односи се и на разумевање појмова и релација. „С обзиром на то да се све математичке активности одвијају посредством спољних репрезентација” (Laborde, 2010: 3), процес изградње појма подразумева употребу различитих репрезентација тог појма, као и кретање између њих, јер употреба различитих облика репрезентације доприноси повезивању симболичких форми са њиховим значењем. Различити облици репрезентације немају улогу алата, који одређеном процедуром воде до одговора, већ се посматрају као средства за решавање проблема са разумевањем, јер омогућавају различите приступе у стварању математичких идеја, које су уграђене у математички проблем, те се могу применити и за испитивање индивидуалног когнитивног развоја ученика (Goldin & Shteingold, 2001). Такође, према Sfard

(1991: 19) у процесу формирања концепта, у фази реификације, од ученика се захтева могућност уочавања познатог у потпуно новом светлу. Имајући у виду наведено, може се закључити да је од централног значаја за развој концептуалног разумевања превођење концепта из једног система репрезентације други путем решавања адекватно осмишљених математичких проблема, јер се у процесу решавања проблема откривају математички концепти који стоје иза њих, док различите стратегије решавања могу дати увид у разумевање математике (процедурално и концептуално). Како је стратегија решавања проблема у великој мери условљена природом проблемске ситуације, процедурално, односно концептуално разумевање може се проценити на основу успешности у решавању процедуралних[1], односно концептуалних проблема.

Развој концептуалног разумевањаможе да се одвија у оквиру семиотичког посредовања, у коме геометријски модели, као семиотички посредници стварају нова значења, и инструменталнегенезе, у којој се геометријски модели, као технички алати, трансформишу или интернализују у психолошки алат (Vygotsky, 1978). Структура геометријске репрезентације доприноси изградњи менталног модела концепта, јер наглашавање структурних карактеристика одређеног концепта преко изабране репрезентације омогућава да се уоче односи и успоставе везе између његових елемената.

МЕТОДОЛОГИЈА ИСТРАЖИВАЊА

Предмет истраживања је примена различитих репрезентација математичких појмова (релације, дужине, обима, површине) у решавању проблема и њихов образовни ефекат, који се односи на концептуално разумевање.

Општи циљ истраживања је експериментална провера теоријског становишта о ефикасности примене различитих репрезентација математичких појмоваu разредној настави у односу на концептуално разумевање.

Задатак истраживања: утврдити да ли експериментални програм утиче на квалитет знања ученика, који се односи на ниво концептуалног разумевања.

Фазе истраживања: извођење експерименталног програма у непосредном раду са ученицима; тестирање (испитивање квалитета знања усвојених током експерименталног програма); статистички приказ резултата провере знања и анализа добијених резултата; извођење закључака за унапређење наставе математике.

[1] Процедурални проблеми су они који захтевају чисто процедурална знања за њихово решавање, тј. решавање проблема више је фокусирано на познавању формалног математичког језика, процедурама, правилима и алгоритмима; док решавање концептуалних проблема захтева познавање одређених математичких појмова и њихових односа (Čadež & Kolar, 2015: 29–30).

Основна хипотеза: Примена различитих репрезентација математичких појмоваутиче на успешност у решавању математичких задатака.

Помоћна хипотеза: Примена различитих репрезентација математичких појмова утиче на повећање нивоа концептуалног разумевања.

У складу са методолошким приступом, који подразумева примену дескриптивно-аналитичке методе истраживања, изабране су следеће варијабле истраживања:

а) *Независна варијабла:* примена различитих репрезентација математичких појмова у настави математике; *б*) *Зависна варијабла:* постигнуће ученика на тесту знања.

У истраживању су примењене следеће *методе*:

1) теоријска (изучавање и анализа психолошко-педагошке, методичке и математичке литературе, која се односи на реализацију експерименталног програма);
2) емпиријска (експериментални рад који се реализује на бази изграђеној у теоријском истраживању, метода педагошког експеримента са паралелним групама);
3) статистичка (обрада и упоређивање резултата рада Е и К групе).

Технике и инструменти истраживања: За потребе квалитативне анализе резултата овог истраживања дефинисани су дескриптори (који су уједно и критеријуми за процену нивоа ефикасности примене различитих репрезентација): процедурално разумевање и концептуално разумевање. У складу с тим, формиран је тест за емпиријску проверу ефикасности експерименталне наставе, који се састоји од 8 задатака, структуираних у две групе: тест „А” и тест „Б”. Индикатор процедуралног разумевањаје успешност у решавању процедуралних проблема (1, 2, 3. и 4. задатак – тест „А”), док је индикатор концептуалног разумевања успешност у решавању концептуалних проблема (5, 6, 7. и 8. задатак – тест „Б”). Тестом знања обухваћене су области *Скуп N* и *Геометрија*.

Узорак, организација и ток истраживања: Истраживање је спроведено на узорку од 60 ученика четвртог разреда Основне школе „Светозар Марковић“ у Београду, од којих је 30 ученика радило под утицајем експерименталног фактора (Е-група), а 30 ученика радило је традиционалним начином рада (К-група).

Динамика извођења експерименталног програма:

Октобар 2013. – Моделовање сценарија за часове и тестова знања.

ЗБОРНИК РАДОВА • ГОД. 22 • БР. 21 • ДЕЦЕМБАР 2019 • 207–226

Новембар 2013. – Формирање уједначених група (иницијално тестирање, претест).

Јануар, април, мај 2014. – Реализација експерименталне наставе (у оквиру 20 наставних часова) на наставним јединицама: *Особине операције множења, Узајамна зависност производа од чинилаца, Решавање једначина, Површина квадра и коцке*.

Мај 2014. – Провера експерименталног програма (Тест).

За статистичку обраду података добијених тестирањем коришћен је Microsoft Excel и SPSS Windows (Верзија 15). За обраду примарних података коришћена је дескриптивна статистичка анализа: аритметичка средина – просек, медијана, минимум и максимум, стандардна девијација, варијанса.

Суштина експерименталног програма је у примени разноврсних репрезентација математичких појмова у току решавања задатака (Прилог 1). Основна идеја је да решавање задатака, са имплицитно повезаним особинама између геометријских и алгбарских објеката, не буде засновано на директној примени правила. Задаци су усмерени на тумачење и формирање репрезентација статичне природе (као што су геометријски модели, који илуструју геометријска својства) и динамичне природе (као што су обрасци, који упућују на процедуре) и успостављање веза између њих. Паралелно са израдом сваког задатка предвиђене су одговарајуће активности, као на пример: упоређивање величина, препознавање образаца и расуђивање о односима између бројева, симболизација, примена геометријских модела, тумачење и примена формула, трансформација алгебарских и геометријских модела у еквивалентне форме. Часови наставе математике у Е-групи и К-групи реализовани су према Наставном плану и програму за четврти разред основне школе. Часови су осмишљени са циљем да се ученици активно укључе у рад и да дају смисао проблемским ситуацијама, да учествују у изградњи важних математичких концепата и метода, у уопштавању и доказивању математичких односа. У току експеримента истраживач је преузео улогу наставника у Е-групи.

РЕЗУЛТАТИ И ДИСКУСИЈА

Решења задатака анализирана су са неколико аспеката: одговори (исправан, неисправан), стратегија решавања, коришћење репрезентација (геометријских, симболичких, табеларних). Ученичким одговорима су додељене квантитативне оцене (бодови од 0 до 5) на основу исправности (тачно, делимично тачно, нетачно) и потпуности (са/без поступка решавања или објашњења).

На основу података у Табели 1. закључује се да је просечан успех код ученика Е-групе приближан на тесту „А" и тесту „Б" (просечан број поена на тесту „А” је $E_1 = 12{,}33$, а $E_2 = 12{,}00$), што указује на чињеницу да је, након реализоване експерименталне наставе, ниво концептуалног разумевања код ученика Е-групе приближан нивоу њиховог процедуралног разумевања. С обзиром на то да постоји нормална расподела (испитивање нормалности расподеле проверена уз помоћ Колмогоров-Смирновог теста приказани у табелама у прилогу), створени су услови за примену t-теста упарених узорака. Да бисмо утврдили разлику у успеху ученика Е групе на „А” тесту и „Б” тесту коришћен је Т-тест упарених узорака (Paired Samples Test), где на основу вредности вероватноће ($p = 0{,}29$) закључујемо да не постоји статистички значајна разлика у успеху ученика Е-групе на „А” тесту и „Б” тесту ($p = 0{,}29 > 0{,}05$).

Табела 1. Поређење успеха ученика Е-групе на тесту „А” и тесту „Б”

Тест „А” Тест „Б”	Број једи-ница у узорку	Min.	Max.	Про-сек	Стандардна девијација	t	df	p
Е1	30	2,00	20,00	12,33	4,88	/	/	/
Е2	30	1,00	20,00	12,20	5,16	/	/	/
Е1–Е2				0,13	0,68	1,07	29	0,293

На основу података у Табели 2. закључује се да је просечан успех код ученика К-групе много бољи на тесту „А” од успеха на тесту „Б” (просечан број поена на тесту „А” је $K_1 = 12{,}16$, а $K_2 = 8{,}70$). Да бисмо утврдили разлику у успеху ученика К групе на тесту „А” и тесту „Б” коришћен је Т-тест упарених узорка (Paired Samples Test), где на основу вредности вероватноће ($p = 0{,}000$) закључујемо да постоји статистички значајна разлика у успеху ученика К-групе на „А” тесту и „Б” тесту ($p = 0{,}000 \leq 0{,}05$). Остварени резултати Е-групе и К-групе на тесту „А” и тесту „Б” указују на чињеницу да је, након спроведеног експерименталног програма ниво концептуалног разумевања Е-групе приближан нивоу процедуралног разумевања, док је ниво концептуалног разумевања К-групе испод нивоа процедуралног разумевања.

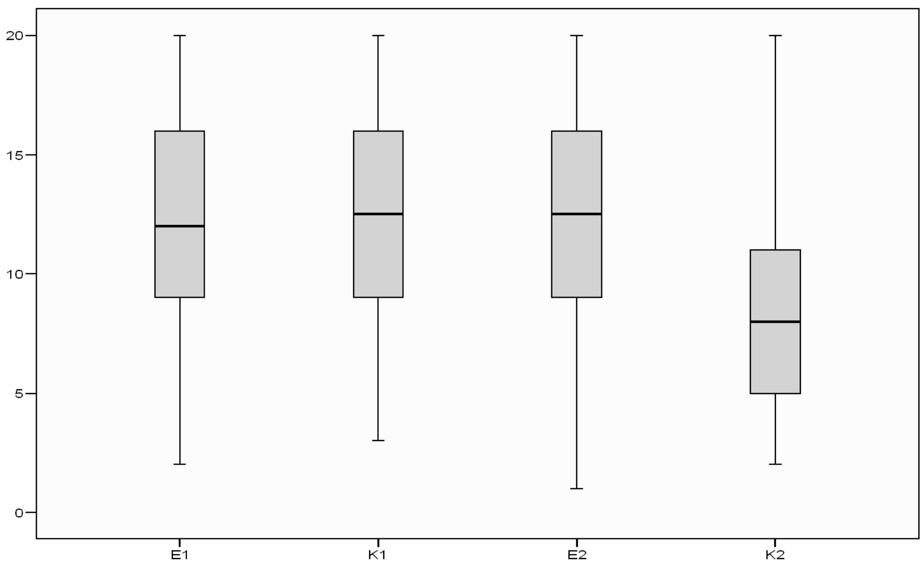
Табела 2. Поређење успеха ученика К-групе на тесту „А” и тесту „Б”

Тест „А”/ Тест „Б”	Број јединица у узорку	Min.	Max.	Просек	Стандардна девијација	t	df	p
К1	30	3,00	20,00	12,16	4.54	/	/	/
К2	30	2,00	20,00	8,70	4,69	/	/	/
К1–К2				3,46	1,33	14,25	29	0,00

Табела 3. Просечан успех ученика Е и К групе на тесту „А” и тесту „Б”

Тестови	Paired Samples Test					t	df	p
	Просек	Стандардна девијација	Стандардна грешка	95% Вероватноћа				
Тест „А” Е1–К1	0,16	0,69	0,13	-0,09	0,43	1,316	29	0,202
Тест „Б” Е2–К2	3,50	1,97	0,36	2,76	4,24	9,7	29	0,000

У тесту „Б” разлика између Е-групе и К-групе је евидентна и статистички значајна, што се може закључити и провером преко вредности *t*-теста ($p = 0,000 \leq 0,05$). На основу података закључујемо да је Е-група остварила боље резултате у односу на К-групу на тесту „Б”, чиме је потврђена помоћна хипотеза: Примена различитих репрезентација математичких појмова је показала да није било статистички значајне разлике између Е и К групе. На основу добијених резултата може се претпоставити да серазвој процедуралног разумевања одвија независно од примене различитих репрезентација. Укупно остварени бодови на целом тесту (уједно тест „А” и тест „Б”) потврђују основну хипотезу: Примена различитих репрезентација математичких појмова утиче на успешност у решавању математичких задатака.



Слика 1. Графички приказ узорачких дисперзија за успех ученика Е и К групе за тест „А” и тест „Б”

Слика 1 приказује незначајне разлике у успеху ученика између Е и К групе остварене на тесту „А”, док су код теста „Б” забележене значајне разлике у успеху ученика Е и К групе, што указује на чињеницу да је након увођења експерименталног фактора ниво процедуралног разумевања код Е-групе приближан нивоу процедуралног разумевања код К-групе, док је ниво концептуалног разумевања код Е-групе изнад нивоа концептуалног разумевања код К-групе.

Резултати истраживања показали су да је током експерименталног програма остварен значајан напредак у постигнућу ученика Е-групе у односу на К-групу. Уочене разлике су статистички значајне и указују на неопходност примене различитих репрезентација појмова, као основног предуслова за већа очекивања од ученичке популације у смислу концептуалног разумевања, а, сами тим, и успешног решавања проблема.

Задаци теста „А” (1, 2, 3 и 4) захтевају аритметичка израчунавања и усмеренису на примену алгебарске процедуре решавања једначина и рутинску примену образаца за израчунавање вредности обима и површине. Решавање геометријских и алгебарских проблема, који су на нумеричко-оперативном нивоу, своди се на израчунавање квантитативних својстава објеката применом правила и одређених процедура, те сам поступак решавања задатака не даје увид у то да ли ученици појмовно разумеју дужину, обим и површину или их сматрају формулама. Дакле, истраживање природе односа између геометријских појмова, као и процена њиховог разумевања, остаје у сенци процедуралне природе решавања проблема.

Задатак 1:

Ако је a дужина странице, O вредност обима и P површина квадрата, попунити табелу.

a	2			8	
O		16			
P			25		81

Задатак 2:

Израчунати обим правоугаоника, чија је дужина 8 cm и површина 56 cm^2.

Задатак 3:

Решити једначину: $2 \cdot x + 317 = 703$

Задатак 4:

Израчунати: а) $300 + 900 : 3 =$ ___________;

б) $192 \cdot 5 - 726 : 6 =$ __________.

У задацима теста „Б" описи геометријских објеката су просторно-нумеричке природе, те су, самим тим, и задаци просторно-нумеричког карактера, јер поред просторног расуђивања пружају могућност и за квантитативну анализу. Нагласак није на коришћењу формула за израчунавање нумеричке вредности. Решавање наведених проблема подразумева проучавање математичких објеката не само са квантитативне стране, већ захтева и квалитативну анализу. У оваквим ситуацијама ученици треба да буду усредсређени на значење појмова и података и на анализу њиховог односа. Основни критеријум процене разумевања појма, у овим задацима, подразумева упоређивање и способност успостављања веза између различитих представа појма. У том смислу, процена разумевања геометријских појмова (дужине, обима, површине) не подразумева примену меморисане формуле, већ успостављање веза између елемената различитих геометријских фигура (квадрат, правоугаоник, квадар). С друге стране, искази у алгебарском језику могу се интерпретирати као односи између геометријских објеката (производ се приказује као површина, збир као растојање), при чему алгебарски задаци добијају геометријски карактер.

У задацима теста „Б" акценат је на разумевању и повезивању геометријских и алгебарских појмова. Структуру задатака чине по четири (односно два) подзадатка, који се сматрају различитим, али у ствари су структурно еквивалентни и само се разликују по контексту у коме су формулисани, тј. по форми података и њихових односа који су описани на бази различитих репрезентација (геометријске и алгебарске). Варијација ситуација и репрезентација у примерима 5, 6, 7 и 8. не захтева хијерархијске активности, већ се когнитивни развој односи на стицање способности разумевања повезаности алгебарских и геометријских садржаја. Намера је била да се, паралелним решавањем еквивалентних форми (геометријске и алгебарске) истог проблема, успоставе везе између различитих репрезентација и препознају начини међусобног повезивања „уграђених" идеја. Идеје за решавање проблема, у овом истраживању, имају: 1) теоријску основу – разумевање појмова геометријских објеката (дужина, обим, површина) и односа међу њима, 2) практичну основу – модификовање услова задатка (геометријска репрезентација алгебре и обрнуто).

Поступак решавања подзадатака 5.б), 5.г), 6.б) и 6.г) заснива се на „интернализованим" физичким/геометријским ученичким стратегијама решавања подзадатака 5.а), 5в), 6.а) и 6.в), редом, и на њиховој апстракцијиу симболичке поступке. Намена слике 1, којом је описан статичан однос између геометријских објеката, је да ученика, док расуђује о проблему, подстакне на примену геометријског модела, који би, уместо на динамичну, указао на статичну природу активности потребних за њихово решавање и тиме их олакшао. Значај конкретне геометријске репрезентације на Слици 1. огледа се не само у менталној перцепцији геометријских појмова, већ представља интерно поимање других математичких концепата, који могу да се замисле у визуелно-просторном виду. Другим речима, дати сликовни приказ:

1) открива квалитативне особине објекта (правоугаоника), тј. одсликава структуру обима и површине, што је неопходно за решавање 5.а), 5в), 6.а) и 6.в);

2) представља геометријску структурну интерпретацију асоцијативности операције множења и дистрибутивности множења према сабирању, које су основ за решавање 5.б), 5.г), 6.б) и 6.г).

Успостављање веза између симболичке ($a + b$, $a \cdot b$) исликовне репрезентације у задацима 5 и 6 омогућава да се симболи „+” и „·” доживљавају као синоними за геометријску репрезентацију. На тај начин се подржава развој способности разумевања појмова обима и површине, јер се ученицима омогућава да користе чулне стратегије и концентришу се на односе, а не на формалне методе рачунања преко утврђених правила и процедура.

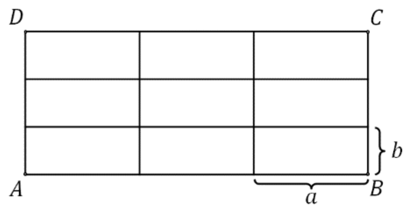
Задатак 5:

а) Израчунати обим правоугаоника *ABCD* на слици 1, ако је $a + b = 6\ cm$.

б) Ако је $a + b = 8$, колико је $6a + 6b$?

в) Ако збир дужина три различите ивице квадра износи 12 *cm*, колико износи збир дужина свих ивица квадра?

г) Ако је $a + b + c = 6$, колико је $4a + 4b + 4c$?



Слика 1.

***Задатак 6*:**

а) Израчунати површину правоугаоника *ABCD* на Слици 1., ако је $a \cdot b = 6\ cm^2$.

б) Ако је $a \cdot b = 18$, колико је $9a \cdot b$?

в) Три стране квадра имају површине 15 cm^2, 6 cm^2 и 10 cm^2. Колико износи површина квадра?

г) Ако је $a \cdot b = 6$, $a \cdot c = 8$, $b \cdot c = 12$, колико је $2a \cdot b + 2a \cdot c + 2b \cdot c$?

Разлика у начину решавања задатка код ученика Е и К групе проузрокована је концептуалним (појмовним) разумевањем. Већина ученика Е-групе има исправну концептуализацију обима и површине фигура. Знатно већи број ученика Е-групе (72%) у односу на ученике К-групе (48%) препознало је улогу датог геометријског модела на слици 1, који омогућава да се са аспекта квантитативног односа између геометријских објеката одреди вредност жељене величине. Ученици К-групе разматрали су површину/обим у смислу одређивања њене вредности применом формуле, јер супроцес решавања почели алгебарском нотацијом облика P = a · b или O = 2 (a + b). Најјаснији сигнал недостатка релацијског и концептуалног разумевања код ученика К-групе је њихова оперативна перцепција проблема статичне природе, што се огледа кроз тумачење статично-динамичне дуалности симбола. (Наиме, исти се симбол може односити на објекат и на квалитет објекта, као што нпр, симболи a и b могу означавати и странице правоугаоника и њихове дужине). Већина ученика Е-групе показала је да симболе може тумачити као статичне производе (објекте), док решавање проблема код ученика К-групе одражава углавном процедурални приступ, што указује на размишљање на конкретном нивоу. Наглашена динамична наспрам статичне концепције симбола, код ученика К-групе, показана је њиховим покушајима да у задацима 5.а), 5в), 6.а) и 6.в) напишу комбинације нумеричких вредности страница a и b, иако се од ученика не захтева аритметичка представа слова a и b, нити је одређивање њихове вредности саставни део процеса решавања. Дакле, већина ученика нема свест о томе које су величине представљене изразима $a + b$ и $a \cdot b$, што представља препреку за разумевање процеса мерења. Наиме, уместо да размишљају са аспекта значења појма (обима, површине), ученици размишљају у смислу саме процедуре. Симболичке представе и рутинска примена образаца за израчунавање обима и површине довели су ученике до тога да су изгубили контакт са геометријским објектима које оне представљају, а самим тим и са значењем обрасца, те изразе $a + b$ и $a \cdot b$ тумаче као процес, који се заснива на прорачунима, а не као објекат. Већина ученика К-групе безуспешно је покушавала да реши задатке 5.б), 5.г), 6.б) и 6.г) посматрајући делове израза као засебне делове, чије вредности треба одредити, а затим сабрати или су примењивали закон дистрибутивности множења према сабирању. За разлику од њих, већина ученика Е-групе решила је проблем визуелизацијом операција и релација између величина у геометријском контексту.

Задаци 7 и 8 захтевају опажање и разумевање различитих форми појма „однос" – као статични објекат или процедура. Алгебарске формулације у задатку 7 упућују на статичан опис односа између величина, док алгебарска репрезентација у задатку 8 однос између две променљиве (a и b) чини динамичним.

Намена задатка 7 је да ученицима пружи могућност да испитају ситуацију расуђивањем о квантитативним односима између геометријских објеката (односно алгебарских израза) без додељивања конкретних нумеричких вредности симболима, тј. враћањем у контекст изворног значења симбола. У задатку 7.а) акценат је на алгебарској интерпретацији геометријског односа, која се огледа у препознавању његове симболичке формулације. Превођењем задатка 7.а) у еквивалентну алгебарску форму 7.б) , која га чини крајње независним од познавања геометрије, од ученика се захтева: 1) тумачење математичке релације приказане у вербалном систему репрезентацијеи идентификација њеног приказа датогу алгебарском семиотичком систему, 2) уочавање еквивалентних једнакости ($6 \cdot S = P$ и $P : 6 = S$) на основу својстава, а не на основу нумеричке вредности, што указује на квантитативно разумевање инверзних операција.

***Задатак 7*:**

а) Која од једнакости: *1*) $6 \cdot S = P$; *2*) $P : 6 = S$; *3*) $P \cdot S = 6$; *4*) $6 \cdot P = S$; *5*) $P = 6 + S$ описује однос између површине коцке (P) и површине једне њене стране (S)?

б) Која од једнакости: *1*) $6 \cdot S = P$; *2*) $P : 6 = S$; *3*) $P \cdot S = 6$; *4*) $6 \cdot P = S$; *5*) $P = 6 + S$ описује да је вредност P шест пута већа од вредности S?

У задатку 7.а) већина ученика Е-групе препознала је обе исправне симболичке формулације квантитативног односа између површине коцке и површине једне њене стране, док је одговор ученика К-групе углавном подразумевао једну формулацију. Препознавање еквивалентних исказа у задатку 7.б) од стране већине ученика Е-групе указује на релационо разумевање знака једнакости.

Анализом уџбеника за четврти разред основне школе може се закључити да се у традиционалној настави расуђивање о обиму/површини правоугаоника углавном своди на: 1) разматрање узајамне зависности дужине странице и обима/површине, што ученике наводи на то да однос између елемената правоугаоника доживљавају само у границама линеарне зависности, односно директне пропорционалности, 2) разумевање да одређена дужина и ширина не дају више од једног обима/површине (на језику алгебре, да је вредност збира/производа бројева јединствена), али се не разматра да ли одређена површина/обим захтева јединствену дужину и ширину. У том смислу, намена задатка 8, у коме су две непознате и један однос, је да ученици покажу како расуђују о односима између величина, које могу имати вишеструке вредности. Задатак представља погодну „дидактички припремљену ситуацију која даје значење операцијама и бројевима уз истицање непромењивости резултата" (Наставни програм за четврти разред основног образовања и васпитања, 2016: 100). Решавање задатка подразумева нумерички опис узајамног односа страница правоугаоника фиксне површине, што доприноси развоју појма функције са две промењиве. У ситуацији 8.б), која је изоморфна геометријском проблему 8.а), репрезентација $a \cdot b = 16$ нуди образац расуђивања, који одступа од традиционалног дедуктивог начина размишљања у статичном окружењу, јер наводи ученике да, размишљајући о промењивим вредностима величина (a и b), уоче да однос између промењивих представља континуирану узајамну зависност величина, тј. да појам „однос" схвате са квалитативног аспекта.

ЗБОРНИК РАДОВА • ГОД. 22 • БР. 21 • ДЕЦЕМБАР 2019 • 207–226

Задатак 8:

а) Одредити правоугаоник минималног обима, ако је површина 36 cm^2.

б) Ако је $a \cdot b = 36$, одреди природне бројеве a и b, тако да њихов збир буде минималан.

Начин решавања задатка 8 код већине ученика К-групе не подразумева вишеструке вредности промењљивих, што је проузроковано непрепознавањем динамичне природе алгебарских симбола. Значајан број ученика Е-групе је непознате величине посматрало са аспекта промењљивих, чије вредности могу бити у распону дозвољених. Пут до алгебарског начина расуђивања о односима они су пронашли независно од алгебарских репрезентација дајући нумеричке примере, који задовољавају однос, при чему полазе од било које промењљиве и формирају табелу могућих вредности, чиме су показали способност превођења алгебарског описа односа (из перспективе вредности објеката) у табеларни приказ.

Резултати истраживања упућују на то да је већина ученика К-групе остала у отелотвореном свету перцепција и акција, везана за процедурална размишљања, док је когнитивна структура елементарног математичког мишљења код ученика Е-групе добила карактер успешног математичког начина размишљања.

ЗАКЉУЧАК

Резултати истраживања указују на то да се процедурално и концептуално разумевање могу развијати независно једно од другог, као и на то да је примена вишеструких репрезентација математичких појмова од великог значаја за развој концептуалног разумевања, које се огледа кроз следеће способности ученика:

1) препознају алгебарску репрезентацију концепта еквивалентну геометријској и обрнуто,

2) препознају исту идеју у различитим репрезентацијама,

3) представљају и анализирају релације између квантитативних варијабли (где промењљиве нису слова која означавају непознате бројеве, већ квантитативне особине објеката, које се мењају у зависности од промене других величина).

Практичан допринос рада огледа се у чињеници (као резултату истраживања) да се, уз примену одговарајућег дидактичког материјала и различитих репрезентација, у млађим разредима основне школе наставне јединице могу-проширити у апстрактније форме, које укључују: еквивалентност израза, директну/обрнуту пропорционалност, идеју о функцијама више промењљивих облика $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$, односно $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2$.

Литература

Byrnes, J. P. & Wasik, B. (1991). Role of Conceptual Knowledge in Mathematical Procedural Learning. *Developmental* Psychology, 27(5), 777–786.

Goldin, G. & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. *The roles of representation in school mathematics*, 1–23.

Carpenter, T. & Lehrer, R. (1999). Teaching and learning mathematics with understanding. In E. Fennema & T. Romberg (eds.): *Mathematics classrooms that promote understanding* (19–32). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society*: *The Development of Higher Psychological Processes*, M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner & E. Souberman (eds.). Cambridge: Harvard University Press.

Hiebert, J. & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (65–97). New York: Mcmillan.

Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching,* 77, 20–26.

Laborde, C. (2010). Linking geometry and algebra through dynamic and interactive geometry. In Z. Usiskin, K. Andersen & N. Zotto (eds.): *Future curricular trends in school algebra and geometry: Proceedings of a conference*, 217–230. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Milinković, J. (2015). Conceptualizing Problem Posing via Transformation. In F. M. Singer, N. F. Ellerton & J. Cai (ed.): *Mathematical Problem Posing From Research to Effective Practice*, 47–70. Research in Mathematics Education, http://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4614-6258-3.

Наставни програм за четврти разред основног образовања и васпитања (2016). Београд: Завод за унапређивање васпитања и образовања. http://www.cerez.org.rs/wp-content/uploads/2016/01/3-Nastavni-program-za-cetvrti-razred-osnovnog-obrazovanja-i-vaspitanja.pdf.

Stylianides, A. J. & Stylianides, G. J. (2007). Learning Mathematics with Understanding: A Critical Consideration of the Learning Principle in the Principles and Standards for School Mathematics. *TMME,* 4(1), 103–114.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics,* 22(1), 1–36.

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (ed.): *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*, 1–27. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Čadež, T. H. & Kolar, V. M (2015). Understanding of mathematically gifted students' approaches to problem solving. In Kolar-Begović, Kolar-Šuper i Đurđević-Babić (eds.): *Higher Goals in Mathematics Education*, Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, 27–39, http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED557785.pdf.

Прилог 1.

Методички подаци о часу	
Наставна тема	Површина
Наставна јединица	**Површина квадра и коцке**
Претходна наставна јединица	Површина квадра и коцке
Тип часа	Вежбање
Облици рада	Индивидуални, фронтални
Циљеви и задаци часа	– Утврђивање појма површине квадра и коцке – Ученик разматра површину у оквиру три контекста (алгебре, аритметике и геометрије). У контексту алгебре појам површине дефинисан је као једнакосна формула $P = 2ab + 2ac + 2bc$, која се схвата као једначина, у којој је потребно нагласити које је од слова*a, b, c* и P променљива (тј. непозната), а која су параметри; У контексту аритметике појам површине представља мерни број (који показује квантитативни однос дате количине према изабраној јединици), тј. број јединичних надовезаних квадратакоји потпуно прекривају ограничену површ, која се мери, док је јединица мере квалитативног карактера. У контексту геометрије, површ је скуп тачака, а површина је својство тог скупа. – Полазећи од тога да „измерити” значи наћи зависност између истородних конкретних величина и скупа реалних бројева, може се напоменути да се површина геометријских тела приказује и као функција, при чему елементи домена и кодомена нису истородне величине: област, која је дефинише, је скуп геометријских фигура, а област њене вредности је скуп реалних бројева
Наставне методе	Дијалошка, илустративна
Наставна средства и потребан материјал	1. Математички задаци, табла, креда 2. *Општи стандарди постигнућа – образовни стандарди за крај првог циклуса обавезног образовања – математика* (2011). Београд: Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања. Креда, табла

<table>
<tr><th colspan="2">Ток часа:</th></tr>
<tr><td>Уводни део часа –
5 минута</td><td>– Нацртати на табли квадар и коцку
– Обновити својства квадра и коцке
– Обновити појам површине квадра и коцке (метричка особина геометријских облика и односа)</td></tr>
<tr><td>Главни део часа –
35 минута</td><td>Задатак 1.
Две стране квадра су квадрати, чија укупна површина представља половину површине квадра. Израчунати површину квадра, ако је површина једне правоугаоне стране $8cm^2$.
Решење:
У домену математичког знања задатак се може решити на више начина: 1) Логички се може закључити да укупна површина четири правоугаоне стране ($4 \cdot 8\ cm^2$) представља половину површине, одакле следи да је површина квадра $P = 2 \cdot 4 \cdot 8\ cm^2$, $P = 64\ cm^2$. 2) У контексту алгебре, једнакост $P = 2ab+2ac+2bc$ прелази у $P = 2 \cdot a \cdot a+2 \cdot a \cdot c+2 \cdot a \cdot c$. Како је $2 \cdot a \cdot a$ половина површине, то значи да је $2 \cdot a \cdot a = 2 \cdot a \cdot c+2 \cdot a \cdot c = 2 \cdot 8\ cm^2+2 \cdot 8\ cm^2 = 32\ cm^2$, тј. $P = 32\ cm^2 +32\ cm^2$, $P = 64\ cm^2$.
Задатак 2.
(подзадаци а) и б) су две еквивалентне форме (геометријска и алгебарска) истог задатка)
а) Ако се свака ивица коцке смањи три пута, колико је пута површина добијене коцке мања од површине полазне коцке?
б) Дат је производ $6 \cdot a \cdot a$. Ако се вредност (оба) чиниоца а смањи три пута, колико пута ће се смањити дати производ?
Решење:
а) Странице сваког квадрата мреже полазне коцке поделићемо на три једнака дела, а затим сваки квадрат мреже на девет мањих једнаких квадрата. Површину новодобијене коцке чини шест мањих квадрата, а површину полазне коцке чине 54 мања квадрата, одакле закључујемо да је површина добијене коцке девет пута мања од површине полазне коцке.
б) На основу раније стеченог знања о зависности производа од чинилаца закључујемо да ће се производ смањити девет пута.</td></tr>
</table>

	Задатак 3. Колико пута је површина коцке ивице 3 *cm* већа од површине једне њене стране? *Решење*: 1) На аритметичком нивоу, прво ћемо израчунати површину коцке, затим површину једне њене стране и упоређивањем закључити да је површина коцке шест пута већа од површине стране. 2) На нивоу алгебарског расуђивања, за решавање задатка нису потребне нумеричке вредности. Упоређивањем површине коцке и једне њене странена алгебарском језику, тј. упоређивањем израза $6{\cdot}a{\cdot}a$ и $a{\cdot}a$ закључујемо да је површина коцке шест пута већа од површине једне њене стране. 3) Цртањем геометријског модела коцке може се открити квантитативни однос између површине коцке и површине једне њене стране без додељивања конкретних нумеричких вредности.
	Задатак 4. Ако је површина коцке K четири пута већа од површине коцке K_1, колико пута је: *а*) површина стране коцке K већа од површине стране коцке K_1? *б*) дужина ивице коцке K већа од дужине ивице коцке K_1? *в*) обим стране коцке K већи од обима стране коцке K_1? *г*) збир дужина свих ивица коцке K већи од збира ивица коцке K_1? *Решење*: Као у претходним задацима, алгебарско решавање задатка треба ускладити са одговарајућим геометријским репрезентацијама (мрежом коцке, где странице кореспондирају чиниоцима, а површина производу).
	Задатак 5. Формулисати геометријски задатак, који одговара задатку: Реши једначину $6 \cdot x^2 = 150$. *Решење*: Задатак је по природи отворен за вишеструка тумачења. Могућа формулација проблема у геометријском контексту је: Одреди дужину ивице коцке површине 150 cm^2.

Завршни део часа – 5 минута	Домаћи задатак: 1.Укупна површина две стране квадра, које су квадрати, представља петину површине квадра и износи 50 cm^2. Колика је површина једне правоугаоне стране квадра? 2. Шта је веће: површина коцке ивице 4/9 *cm* или површина коцке ивице 5/9 *cm*? 3. Израчунај површину квадра, чије су све стране правоугаоници, а збир свих ивица 28 *cm*. (Мерни бројеви димензија су природни бројеви.)

ЗБОРНИК РАДОВА • ГОД. 22 • БР. 21 • ДЕЦЕМБАР 2019 • 207–226

Прилог 2.

Табела 1. Тест о нормалности распореда – Е група

	Kolmogorov-Smirnov(a)			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	p
E1	0,074	30	0,200(*)	0,971	30	0,576
E2	0,073	30	0,200(*)	0,979	30	0,787

Нормалност распореда се показује статистички незначајним (случајним) одступањем од нормалности уколико је p > 0,05. У Е групи вредност p > 0,05 јер је p = 0,576 за Е1, и p = 0,787 за Е2. То значи да се може користити нормална расподела.

Табела 1. Тест о нормалности распореда – Е група

	Kolmogorov-Smirnov(a)			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	p
K1	0,106	30	0,200(*)	0,961	30	0,325
K2	0,124	30	0,200(*)	0,934	30	0,062

У К групи вредност p > 0,05 јер је p = 0,325 за К1, и p = 0,62 за К2. То значи да се може користити нормална расподела.

Мика Раконяц
Ясмина Милинкович
Университет в Белграде, Учительский факультет

ВЛИЯНИЕ ПРИМЕНЕНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ПОНЯТИЙ И ПРОЦЕДУР НА КОНЦЕПТУАЛЬНОЕ ПОНИМАНИЕ

Аннотация

Теоретическое обоснование концептуальных и процедурных математических знаний лежит в основе исследований, представленных в данной статье. Цель исследования – изучить влияние экспериментальной программы, основанной на установлении взаимосвязей между различными представлениями концепций и процедур, на развитие концептуального понимания и успешность решения проблем в следующих областях: набор натуральных чисел, геометрических фигур и тел. В ходе исследования был проведен педагогический эксперимент с параллельными группами на выборке из 60 учеников четвертого класса начальной школы. Эффективность внедрения экспериментального фактора рассматривалась: 1) качественным анализом ответов учеников (дескрипторы: углубленное понимание, концептуальное понимание); 2) статистическим анализом количественных данных на основе ответов учащихся в итоговом тесте. Результаты показывают, что применение различных представлений этого термина в обучении является формой эффективной поддержки развитию концептуального понимания и успеха в решении математических задач.

Ключевые слова: *репрезентация, концептуальное понимание, процедурное понимание.*